Fonctions — DM

À rendre le mardi 15 octobre.

Exercice 1 (Polynômes du second degré)**.** Calculer la valeur du nombre suivant.

$$x=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

Exercice 2 (Somme et produit de fonctions)**.** Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I.

Somme de fonctions On note f la fonction somme $u+v$ définie sur I par $f(x)=(u+v)(x)=u(x)+v(x)$.

(a) On suppose que les fonctions u et v sont croissantes sur I. Étudier le sens de variation de f sur I.

(b) On suppose que les fonctions u et v sont décroissantes sur I. Étudier le sens de variation de f sur I.

(c) Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation des fonctions u, v, f sur $\mathbb{R}$: $u(x)=2x+1$ et $v(x)=-\frac{x}{2}+3$; $u(x)=-2x+3$ et $v(x)=2x+4$; $u(x)=x^2$ et $v(x)=2x+1$.

(d) Commenter l'affirmation : *La somme de deux fonctions monotones sur un intervalle I est monotone sur I.*

Produit de fonctions On note g le produit $u\times v$ défini par $g(x)=(u\times v)(x)=u(x)\times v(x)$.

(e) Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation des fonctions u, v, g sur $\mathbb{R}$: $u(x)=x$ et $v(x)=x+1$; $u(x)=-x$ et $v(x)=-x+1$.

(f) Répondre par *vrai* ou *faux*, en justifiant.

— Le produit de deux fonctions croissantes sur un intervalle I est une fonction croissante sur I.

— Le produit de deux fonctions décroissantes sur un intervalle I est une fonction décroissante sur I.

— Le produit de deux fonctions monotones sur un intervalle I est une fonction monotones sur I.

Exercice 3 (Fonction cube)**.** On appelle *fonction cube* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$.

(a) Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, les variations de cette fonction sur $\mathbb{R}$.

(b) Justifier que, si $a < 0 < b$, alors $a^3 < b^3$.

(c) (i) Montrer que pour tous réels a et b, on a :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

.

(ii) Quel est le signe de $a^2 + ab + b^2$ si a et b sont de même signe ?

(d) Déduire des questions précédentes que, pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a $a^3 < b^3$. Conclure.

(e) Établir le tableau de variation de la fonction cube.

(f) Tracer sur l'écran de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions carré et cube. Étudier (par le calcul) les positions relatives de ces deux courbes.