Mathématiques — Première S

2021 — 2022

Table des matières

Chapitre 0

Algorithmique

Définition. Un *algorithme* est une suite finie d'opérations élémentaires permettant de résoudre un problème donné.

Exemple. ...

Trois parties (qui peuvent être mélangées) composent un algorithme :

— entrée des données ;

— traitement des données ;

— sortie des résultats.

1 Variables

Définition. Une *variable* est un espace en mémoire, portant un nom, dans lequel on peut stocker une valeur.

L'instruction `a`$\rightarrow$`b` se lit *affecter* **`a`** *à* **`b`**, et signifie : aller chercher en mémoire la valeur de `a`, et placer cette valeur dans `b`. D'autres notations possibles sont : `b` $\leftarrow$ `a` (« `b` reçoit `a`) ; `Affecter a à b` ; `a = b` ; etc.

Exemple.

Instructions	Contenu de x	Contenu de y
Début		
`3`$\rightarrow$`x`		
`3x`^{2} `+ 2x`$\rightarrow$`y`		
`2y`$\rightarrow$`y`		

2 Entrées / Sorties

Il est possible de demander à l'utilisateur d'affecter une valeur à une variable, avec une instruction du type `Lire a`. Le programme attend que l'utilisateur saisisse une valeur au clavier, puis place dans l'espace mémoire correspondant à `a` cette valeur.

Il est possible d'afficher quelque chose à l'écran avec l'instruction `Afficher a`.

Exemple. Que fait l'algorithme suivant ?

```
Lire a
a × a → a
Afficher a
```

Exercice 1. Écrire un algorithme qui demande un nombre à l'utilisateur, calcule l'image de ce nombre par la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 1$, et affiche ce rélultat.

Exercice 2. Que fait l'algorithme suivant ?

```
Lire n
n → m
n + 3 → n
n × 2 → n
n + m → n
n ÷ 3 → n
n − 2 → n
Afficher n
```

3 Conditionnelles

Définition. Pour résoudre certains problèmes, il est parfois nécessaire de faire un test pour savoir si on doit exécuter une tâche ou une autre. *Si* le test est vrai, *alors* on exécute une tâche, *sinon* on exécute une autre tâche.

Exemple.

```
Afficher "Longueur des trois cotes."
Lire A
Lire B
Lire C
Si A = B et B = C
Alors
  Afficher "Le triangle est equilateral."
Sinon
  Si A = B ou B = C ou A = C
  Alors
    Afficher "Le triangle est isocele."
  Sinon
    Afficher "Le triangle est scalene."
  FinSi
FinSi
```

Exercice 3. Que fait l'algorithme suivant ?

```
Lire x
Si x > 0
Alors
  Afficher √x
Sinon
  Afficher "Impossible"
FinSi
```

Exercice 4.

(1) Écrire un algorithme qui lit les coordonnées de deux vecteurs, et qui affiche si les vecteurs sont colinéaires ou non.

(2) Modifier l'algorithme pour qu'il calcule en plus le coefficient de colinéarité.

4 Boucles

Certains problèmes nécessitent de répeter un ensemble d'instructions plusieurs fois.

Il existe deux types de boucles :

— les boucles `Pour i allant de 1 à n` exécutent `n` fois la boucle, pour chacune des valeurs possibles de `i` ;

— les boucles `While condition` exécutent la boucle tant que la condition n'est pas remplie.

Exemple. Affichage de la table de multiplication de 9.

```
Pour i allant de 1 a n
Faire
   Afficher 9×i
FinPour
```

Exemple. Calcul de l'entier n tel que la somme des entiers de 1 à n fait 2016.

```
0 → somme
0 → n
Tant que somme < 2016
Faire
   n + 1 → n
   somme + n → n
FinTantque
Si somme = 2016
Alors
   Afficher n
Sinon
   Afficher "Impossible"
FinSi
```

5 Exercices

Exercice 5.

a. Écrire un algorithme qui lit les coordonnées de deux points et affiche une équation cartésienne de la droite correspondante.

b. Modifier l'algorithme pour qu'il commence par vérifier que les deux points sont différents.

c. Écrire un algorithme qui prend en entrée l'équation cartésienne d'une droite, et qui affiche l'équation réduite de la même droite.

d. Modifier l'algorithme pour qu'il affiche aussi deux points caractérisant cette droite.

e. Modifier l'algorithme pour qu'il affiche aussi un point et un vecteur caractérisant cette droite.

Exercice 6. Un magasin offre 5% de réduction sur le montant total d'un achat si celui-ci est supérieur à 100 €. Écrire un algorithme qui lit en entrée le montant total, et affiche le montant après l'éventuelle réduction.

Exercice 7. Une bactérie double sa population chaque jour. Écrire un algorithme qui calcule la population de bactéries après trente jours, à partir d'une seule bactérie au départ.

Exercice 8. Un enfant veut acheter un jeu à 245 €. Ses parents lui donnent un euro la première semaine, deux euros la deuxième semaine, et ainsi de suite. Écrire un algorithme qui calcule à partir de combien de semaine l'enfant va-t-il pouvoir acheter son jeu ?

Exercice 9. On appelle *parfait* un nombre qui est égal à la somme de ses diviseurs, sauf lui même ($6 = 1 + 2 + 3$ est parfait ; $8 \neq 4 + 2 + 1$ n'est pas parfait). Écrire un algorithme qui vérifie si un nombre est parfait. Écrire un second algorithme qui cherche tous les nombres parfaits inférieurs à un nombre donné.

Chapitre 1

Trinômes du second degré

Définition. Un *trinôme du second degré* est une fonction f de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels, et $a \neq 0$.

1 Formes d'un trinôme

Description (Utilité des différentes formes)**.**

Forme factorisée : $a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$ avec $a \neq 0$, et éventuellement $x_1 = x_2$.

- Met en valeur les racines.
- Cette forme n'existe pas toujours.

Forme canonique : $a\left(x - \alpha\right)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.

- Met en valeur l'extremum et l'abscisse à laquelle il est atteint.
- Existe toujours.

Forme développée : $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

- Forme « par défaut ».
- Utile pour calculer des images.

Remarque. Dans toute la suite, on considérera un trinôme $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels, et $a \neq 0$.

Activité. TODO Passage de la forme développée à la forme canonique.

Propriété (De la forme développée à la forme canonique)**.** Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut être mis sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

2 Racines

Définition. Étant donné un trinôme $ax^2 + bx + c$, on appelle *discriminant* de ce trinôme le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Définition. On appelle *racines* d'un trinôme ax^2+bx+c les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Propriété. Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Trois cas seulement sont possibles :

— si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
— si $\Delta = 0$, le trinôme a une unique racine (dite *racine double*) $x_1 = \frac{-b}{2a}$;
— si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racines.

Propriété (De la forme canonique à la forme factorisée)**.** Un trinôme $ax^2 + bx + c$ peut être mis sous la forme :

- $a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta > 0$, et alors $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- $a(x - x_1)^2$ si $\Delta = 0$, et alors $x_1 = \frac{-b}{2a}$;
- ne peut pas être factorisé si $\Delta < 0$.

3 Signe

Propriété. Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$, et Δ son discriminant.

— si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a à l'extérieure des racines, et du signe de $-a$ à l'intérieur ;
— si $\Delta = 0$, le trinôme est du signe de a, strictement sauf en l'unique racine où il est nul ;
— si $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a, strictement.

4 Variations

Propriété. Soit une fonction trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

- si $a > 0$, P est décroissante sur $]-\infty; \frac{-b}{2a}]$, et croissante sur $[\frac{-b}{2a}; +\infty[$;
- si $a < 0$, P est croissante sur $]-\infty; \frac{-b}{2a}]$, et décroissante sur $[\frac{-b}{2a}; +\infty[$.

5 Bilan et Interprétation géométrique

TODO : Fiche de synthèse

Chapitre 2

Suites arithmétiques et géométriques

1 Premières définitions

Définition. Une *suite* est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) qui à tout entier n (appelé *rang*) de son domaine de définition associe le réel u_n, appelé *terme de la suite*.

Remarque. Une définition non formelle est : une suite est une liste infinie de nombres réels, numérotés.

Remarque. Une suite peut être définie (entre autres) :

— par récurrence en donnant le(s) premier(s) terme(s) et une formule permettant de calculer les suivants ;

— avec une formule explicite, donnant directement le terme de rang n.

Exemple.

— Soit la suite u définie par : $u_n = 3 \times 2^n - 1$. Ses premiers termes sont $2, 5, 11, 23 \ldots$.

— Soit la suite v de premier terme 1, et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + 1$. Ses premiers termes sont : $1, 3, 7, 15 \ldots$.

— Soit la suite w définie par : w_n est le temps d'ensoleillement, en minutes, au portail du lycée, au n^{e} jour après le premier janvier 2014.

Remarque. Soient une suite u.

— u et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voire (u_n)) désignent la suite ;

— u_n est un réel : c'est le terme de la suite de rang n.

En prenant une fonction f pour analogie, on peut comparer u et (u_n) à f, et u_n à $f(x)$ (pour un certain x).

Définition. Une suite est u est dite :

— *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$;

— *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$;

— *constante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.

Exemple. TODO Suite croissante, décroissante, croissante à partir d'un certain rang, ni croissante ni décroissante.

2 Suites arithmétiques

Définition. Une suite u est dite *arithmétique* s'il existe un réel r, appelé *raison*, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_{n+1} = u_n + r$.

Habituellement, une suite arithmétique est définie par la donnée de son premier terme et sa raison.

Exemple.

— La suite $0, 1, 2, 3$ est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.

— La suite $-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ est une suite arithmétique de premier terme $-\frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{4}$.

— La suite $97,1; 96,2; 95,3$ est une suite arithmétique de premier terme $97,1$ et de raison $-0,9$.

— La suite $1, 1, 1, 1$ est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 0.

Remarque. Dans toute la suite, on considère la suite u arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

Méthode. TODO Prouver qu'une suite est arithmétique.

Propriété.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_p + (n - p)r$.

— En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Propriété. La suite u est :

— (strictement) croissante si et seulement si sa raison est (strictement) positive ;

— (strictement) décroissante si et seulement si sa raison est (strictement) négative ;
— constante si sa raison est nulle.

Démonstration. Soit u une suite arithmétique.

TODO Revoir : cette propriété n'a pas encore été vue.

Alors u est croissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Or, puisque u est arithmétique, $u_{n+1} - u_n$ est égale à sa raison, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ si et seulement si sa raison est positive.

Les autres cas se démontrent de manière similaire.

□

Propriété. TODO Limite ? Dans le chapitre suivant ?

Propriété. La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule

$$\text{Somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration.*On ne démontre que le cas particulier ; le cas général est admis.* On appelle $S = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$. En écrivant la même somme, mais en partant du plus grand terme, on a : $S = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$.

On ajoute membre à membre ces deux expressions de S :

$$2S = ((1+n) + (2+n-1) + \ldots + ((n-1)+2) + (n+1)$$

On remarque alors que chacun de ces termes est égal à $n+1$, et qu'ils sont au nombre de n. Ainsi, $2S = n(n+1)$, ou encore :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

3 Suites géométriques

Définition. Une suite v est dite *géométrique* s'il existe un réel q non nul, appelé *raison*, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $v_{n+1} = qv_n$.

Habituellement, une suite géométrique est définie par la donnée de son premier terme et de sa raison.

Exemple.

- La suite $2, 4, 8, 16, \ldots$ est géométrique de premier terme 2 et de raison 2.
- On place 100 € sur un compte en banque, rapportant 3 % d'intérêts par ans. Si on ne place ni ne retire d'argent sur le compte, la suite constituée des sommes présentes sur le compte, en euros, à la fin de chaque année est géométrique de premier terme 100 et de raison $1,03$.
- La suite $256, -128, 64, -32 \ldots$ est géométrique de premier terme 256 et de raison $-\frac{1}{2}$.
- La suite $3, 3, 3, 3 \ldots$ est géométrique de premier terme 3 et de raison 1.

Remarque. Dans toute la suite, v est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q.

Propriété.

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_p q^{n-p}$.
- En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 q^n$.

Propriété. TODO Simplifier ?

1. Soit w la suite définie par $w_n = q^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$). La suite w est :
   - croissante si $q \geqslant 1$;
   - décroissante si $0 < q \leqslant 1$;
   - constante si $q = 1$;
   - ni croissante ni décroissante si $q < 0$.

   De plus, elle est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si $q > 1$ (resp. $0 < q < 1$).
2. La suite v :
   - a les mêmes variations que w si $v_0 > 0$;
   - a des variations opposées si $v_0 < 0$;
   - est constante si $v_0 = 0$.

Démonstration. Soit w la suite géométrique définie dans la propriété, avec q supérieur à 1. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = qw_n$ par définition de w. Or quel que soit n, w_n est un produit de termes strictement positifs, donc w_n est lui-même un nombre strictement positif. Donc $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geqslant q$, et la suite est croissante.

Les autres cas se démontrent de manière similaire.

□

Remarque. On dit qu'une suite géométrique de raison $q > 1$ croît de manière *exponentielle*. TODO développer.

Propriété. Soit un nombre réel q différent de 0 et 1. La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q est donnée par la formule

$$\text{Somme} = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Démonstration. *On suppose d'abord que le premier terme de la suite est 1.*

Soit v une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q ($q \neq 0$ et $q \neq 1$). Soit n un entier naturel. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n} v_k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$$

On a alors $qS = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1} = S + q^{n+1} - 1$, et donc $S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Cas général : le premier terme de la suite n'est pas nécessairement 1.

Soit w la suite définie par $w_n = q^n$. On remarque que pour tout n, $v_n = v_0 q^n = v_0 w_n$. Donc la somme des termes de 0 à n de v vaut :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} v_0 w_k = v_0 \sum_{k=0}^{n} w_k = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

□

Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

1 Variations

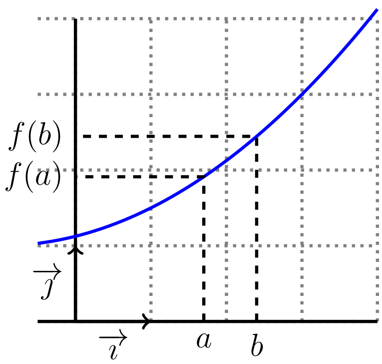
Définition. Soit une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ (où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$).

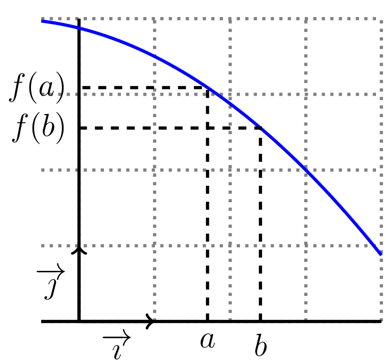
— On dit que f est *croissante* (respectivement *strictement croissante*) si quels que soient a et b dans $\mathcal{D}$, si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ (respectivement $f(a) < f(b)$). On dit aussi que « la fonction f conserve l'ordre ».

— On dit que f est *décroissante* (respectivement *strictement décroissante*) si quels que soient a et b dans $\mathcal{D}$, si $a < b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$ (respectivement $f(a) > f(b)$). On dit aussi que « la fonction f inverse l'ordre ».

— On dit que f est *constante* si quels que soient a et b dans $\mathcal{D}$, alors $f(a) = f(b)$.

— On dit qu'une fonction est *monotone* (respectivement *strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou décroissante).





2 Fonctions associées

Propriété (Fonctions associées)**.** Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_u$ sa courbe représentative.

(a) Étant donné un réel k, la courbe de la fontion $u+k$ (c'est-à-dire la fonction $x \mapsto u(x)+k$) est l'image de la courbe $\mathcal{C}_u$ par la translation de vecteur $(0,k)$. De plus, les fonctions u et $u+k$ ont les mêmes variations sur I.

(b) Étant donné un réel strictement positif λ, la courbe de la fonction λu (c'est-à-dire la fonction $x \mapsto \lambda u(x)$) est l'image de $\mathcal{C}_u$ par une « compression ou un étirement vertical ». Si λ est négatif, la courbe de λu est l'image de $\mathcal{C}_u$ par une « compression ou un étirement vertical », suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

De plus :

— si λ est positif, les fonctions u et λu ont mêmes variations sur I ;

— si λ est négatif, les fonctions u et λu ont des variations opposées sur I.

(c) La fonction u étant supposée positive sur I, la fonction $\sqrt{u}$ a les mêmes variations que la fonction u sur I.

(d) La fonction u ne s'annulant pas sur I, la fonction $\frac{1}{u}$ a des variations opposées à celles de u sur I.

Démonstration. Soit u une fonction croissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (la démonstration est similaire si u est décroissante).

(a) Soit k un réel quelconque, et a et b deux éléments de I, tels que $a < b$. Alors :

$$\begin{aligned} a &< b \\ f(a) &\leqslant f(b) \text{ car } f \text{ est croissante} \\ f(a)+k &\leqslant f(b)+k \end{aligned}$$

Donc la fonction $x \mapsto f(x)+k$ est croissante.

(b) Soit λ un réel strictement positif, et a et b deux éléments de I, tels que $a < b$. Alors :

$$\begin{aligned} a &< b \\ f(a) &\leqslant f(b) \text{ car } f \text{ est croissante} \\ \lambda f(a) &\leqslant \lambda f(b) \text{ car } \lambda \text{ est positif} \end{aligned}$$

Donc la fonction $x \mapsto \lambda f(x)$ est croissante.

De même, si *lambda* est strictement négatif...À vous !

□

Méthode (Application, sur un exemple)**.** Quelles sont les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}} + 7$, définie sur $\mathbb{R}$?

La fonction $x \mapsto x^2 + 2x + 5$ est un trinôme du second degré, décroissant sur $]-\infty; -1]$, et croissant ensuite. En utilisant les fonctions associées, on obtient :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x^2+2x+5		$\searrow$	4	$\nearrow$	
$\sqrt{x^2+2x+5}$		$\searrow$	2	$\nearrow$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}+7$		$\nearrow$	$\frac{15}{2}$	$\searrow$	

3 Position relative

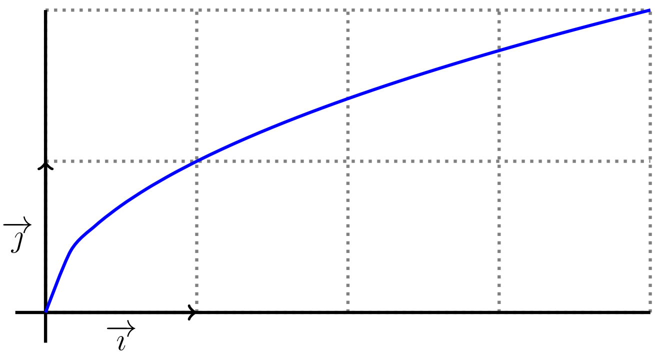
Propriété. Étant donnés deux fonctions f et g, et leurs courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectives, « $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle I » est équivalent à « pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ ».

4 Racine carrée

Définition.

— Étant donné un nombre réel positif a, sa racine carrée $\sqrt{a}$ désigne l'unique nombre positif dont le carré est a.

— La fonction racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ qui a chaque réel positif x associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.



Propriété. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration. Soient a et b deux nombres de $\mathbb{R}^+$, avec $a < b$. On a :

$$\begin{aligned}
a &< b \\
a - b &< 0 \\
\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 &< 0 \text{ car } a \text{ et } b \text{ sont positifs} \\
\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) &< 0 \\
\sqrt{a} - \sqrt{b} &< \frac{0}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \text{ car } \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ est strictement positif} \\
\sqrt{a} - \sqrt{b} &< 0 \\
\sqrt{a} &< \sqrt{b}
\end{aligned}$$

Nous avons montré que si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$: donc la fonction racine est strictement croissante.

□

Propriété (Positions relatives)**.** Soient $\mathcal{C}_x$, $\mathcal{C}_{x^2}$, $\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$, les courbes respectives des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$ définies sur $\mathbb{R}^+$. Alors :

— si $x \in [0; 1]$, alors $\mathcal{C}_{x^2}$ est en dessous de $\mathcal{C}_x$, elle même en dessous de $\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$;

— si $x \in [1; +\infty]$, alors $\mathcal{C}_{x^2}$ est au dessus de $\mathcal{C}_x$, elle même au dessus de $\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$.

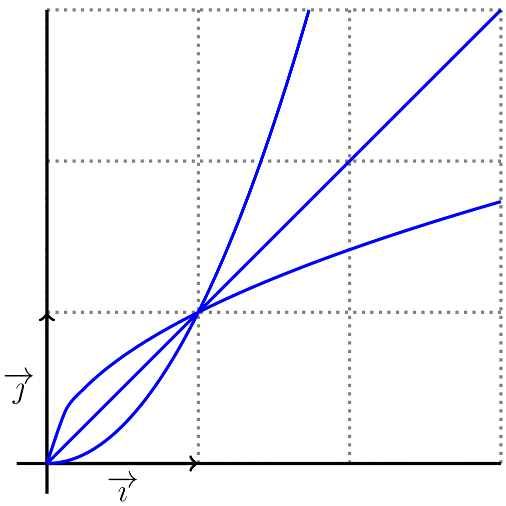
Démonstration.[TODO : À détailler]

— Premier cas : en 0 et 1, les courbes sont confondues, donc tout va bien.

— Second cas : soit $0 < x < 1$. Alors $\sqrt{0} < \sqrt{x} < \sqrt{1}$ (car $\sqrt{\cdot}$ est croissante), et $0 < \sqrt{x} < 1$. En multipliant par $\sqrt{x} > 0$, on a $0 < x < \sqrt{x}$. En élevant au carré (cette fonction étant croissante sur les positifs), on a $0 < x^2 < x$. CQFD.

— Troisième cas : soit $x > 1$. Idem.

□



5 Valeur absolue

Définition. La *valeur absolue* d'un nombre réel x, noté, $|x|$, est égale à

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

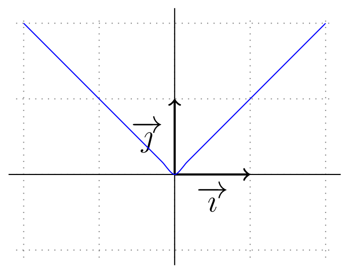
Propriété. Quels que soient x et y dans $\mathbb{R}$, on a :

- $|x| \geqslant 0$;
- $|x| = |-x|$;
- $|xy| = |x|\,|y|$;
- si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Définition. La *fonction valeur absolue* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui a tout x associe sa valeur absolue $|x|$.

Propriété. Les variations de la fonction valeur absolue sont :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$\searrow$	0	$\nearrow$



Propriété (Équations)**.** Quels que soient x et y dans $\mathbb{R}$, on a :

- $|x| = 0$ ssi $x = 0$;
- $|x| = y$ ssi $\begin{cases} x = y & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x = y & \text{si } x < 0 \end{cases}$;
- $|x| = |y|$ ssi $x = y$ ou $x = -y$;
- $|x + y| \neq |x| + |y|$ en général.

Propriété (Équations)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| = a$ (où $a \in \mathbb{R}$). Alors :

- si $a < 0$, l'équation n'a pas de solutions ;
- si $a = 0$, $x = 0$;
- si $a > 0$, $x = a$ ou $x = -a$.

Chapitre 4

Vecteurs et Droites

Remarque. Le plan est muni d'un repère (O, I, J) quelconque (pas nécessairement normé, pas nécessairement orthogonal).

1 Colinéarité

Définition. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *colinéaires* si et seulement si il existe k réel tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Propriété.

(i) Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire avec tout vecteur $\overrightarrow{u}$.

(ii) Si deux vecteurs (non nuls) sont colinéaires, tout vecteur (non nul) colinéaire à l'un est colinéaire à l'autre.

(iii) (HP) On dit que la colinéarité est une *relation transitive* parmi les vecteurs non nuls.

Démonstration.(partielle…)

(i) Pour n'importe quel vecteur $\overrightarrow{u}$, on a : $\overrightarrow{0} = 0 \times \overrightarrow{u}$.

□

Propriété (Condition de colinéarité)**.** Deux vecteurs $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Démonstration.

Premier cas : l'un des deux vecteurs est nul . Alors ses coordonnées sont $\binom{0}{0}$, les deux vecteurs sont colinéaires, et nécessairement $xy' - x'y = 0$.

Second cas : les deux vecteurs sont non nuls . Soient $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$, non nuls, colinéaires, et k le réel tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$. Alors $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$, et $xy' - x'y = kx'y' - kx'y' = 0$.

La réciproque est laissée au lecteur patient...

□

2 Équations de droites

Activité (TODO À voir)**.** Soit une droite définie par deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. À quelle condition un point $M(x, y)$ appartient-il à $\mathcal{D}$?

Le point M appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si A, B et M sont alignés, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

TODO

...si et seulement si $ax + by + c = 0$.

Définition et Propriété. Toute droite $\mathcal{D}$ du plan admet une équation *cartésienne* de la forme $ax + by + c = 0$, où l'un (au moins) des nombres a et b est non nul. La droite est constituée de l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation.

Définition et Propriété.

- On appelle *vecteur directeur* d'une droite $\mathcal{D}$ du plan tout vecteur $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de $\mathcal{D}$.
- Une droite d'équation cartésienne $ax+by+c = 0$ admet un vecteur directeur de coordonnées $(-b; a)$.

Propriété (Caractérisation d'une droite)**.** Une droite du plan peut-être caractérisée par :

- deux points distincts ;
- un point et un vecteur directeur (non nul) ;
- une équation cartésienne ;
- une équation réduite.

Seule la caractérisation par équation réduite est unique.

3 Décomposition de vecteurs

Propriété. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Alors tout vecteur $\overrightarrow{w}$ peut être décomposé de façon unique comme $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$, où a et b sont réels.

Définition.

(i) On appelle *repère du plan* la donnée d'un point O et de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

(ii) Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ s'écrit aussi : « M a pour coordonnées (a, b) dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ».

Propriété.

(i) Une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(x; y)$ (avec $x \neq 0$) a pour coefficient directeur $\frac{y}{x}$.

(ii) Une droite de coefficient directeur m a un vecteur directeur de coordonnées $(1; m)$.

Propriété. Soient d_1 et d_2 deux droites. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) Les deux droites sont parallèles.

(ii) Les deux droites ont deux vecteurs directeurs colinéaires.

(iii) Les deux droites ont tous leurs vecteurs directeurs colinéaires.

(iv) S'ils existent, les coefficents directeurs des deux droites sont égaux.

Chapitre 5

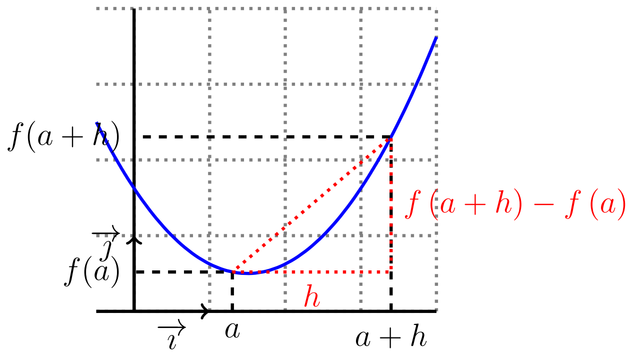
Dérivation

1 Nombre dérivé d'une fonction

Définition (Taux d'accroissement)**.** Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et $a \in \mathcal{D}$. Pour $h \neq 0$, $a + h \in \mathcal{D}$, on appelle taux d'accroissement le rapport :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque. Le taux d'accroissement est la pente de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a + h, f(a + h))$.



Définition (Nombre dérivé)**.** Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et $a \in \mathcal{D}$. S'il existe l tel que la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tende vers l quand h tend vers 0, alors :

- — on dit que f est *dérivable* en a ;
- — on note $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+x)-f(a)}{h} = l$;
- — $l = f'(a)$ est appelé *nombre dérivé de f en a.*

Propriété (Interprétation géométrique)**.** Si une fonction f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe de f en $(a, f(a))$.

2 Tangente

Définition (Tangente)**.** Soient I un intervalle, $a \in I$, f une fonction définie sur I, dérivables en a, et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. La droite passant par le point $(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée *tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a*.

Remarque. Visuellement, cette définition correspond à la définition déjà connue d'une tangente à un cercle : la tangente à une courbe $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(a, f(a))$ est la droite passant par ce point, et ne « touchant » la courbe qu'en ce point là, dans un voisinage de ce point.

Propriété (Tangente)**.** Soit f une fonction dérivable en a. L'équation de la tangente à la courbe de f en $(a, f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

3 Fonctions et opérations usuelles

Définition (Dérivée d'une fonction)**.** Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et I un sous-ensemble de $\mathcal{D}$. On dit que f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout point de I.

On appelle *fonction dérivée de f*, et on note f', la fonction qui à tout point x de I associe le réel $f'(x)$, nombre dérivé de f en x.

Propriété (Dérivées des fonctions usuelles)**.**

— Sur $]0; +\infty[$, la dérivée de la fonction racine $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

— Sur $\mathbb{R}^*$, la dérivée de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

— Sur $\mathbb{R}$, pour n un entier naturel non nul, la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$.

Remarque. La dernière propriété est vraie pour tout α réel non nul, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ (ou $x \in \mathbb{R}^*$ is $\alpha > 0$) : la dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$. De là, on peut en déduire les deux propriétés précédentes : soient $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors, quel que soit x réel, $u(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $v(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, et :

$$u'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$v'(x) = -1 \times x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Corollaire. Sur $\mathbb{R}$:

— la dérivée d'une fonction constante (pour un k réel) $x \mapsto k$ est la fonction nulle $x \mapsto 0$;
— la dérivée d'une fonction affine $x \mapsto ax+b$ est une fonction constante $x \mapsto a$;
— la dérivée de la fonction carrée $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$.

Propriété (Opérations usuelles)**.** Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et λ un réel. Alors :

— $(\lambda u)' = \lambda u'$;
— $(u+v)' = u' + v'$ (la dérivée de la somme est la somme des dérivée) ;
— $(u \times v)' = u'v + v'u$;
— $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ (si v ne s'annule pas sur I).

Chapitre 6

Statistiques descriptives

1 Définitions

Définition (Rappels)**.** Population, individu, caractère (qualitatif ou quantitatif, discret ou continu), effectif, fréquence, effectifs (ou fréquences) cumulés croissants : voir cours de secondes.

2 Couples d'indicateurs

2.1 Médiane et écart interquartile

Définition (Médiane et quartiles)**.**

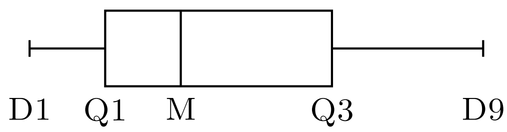
- La *médiane* m est une valeur du caractère étudié telle que la moitié de l'effectif ait des valeurs inférieures à m, et l'autre moitié des valeurs supérieures à m.
- Le *premier quartile* (respectivement *troisième quartile*) est le plus petit élément Q_1 (resp. Q_3) des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 25 % (resp. 75 %) des données sont inférieures ou égales à Q_1 (resp Q_3).
- L'*écart interquartile* est la valeur $|Q_3 - Q_1|$.

Définition (Déciles)**.** Le *premier décile* D_1 (respectivement *neuvième décile* D_9) est le plus petit élément des valeur des termes de la série, tel qu'au moins 10 % (respectivement 90 %) des données sont inférieures ou égales à cette valeur.

Exemple. Voici les températures relevées pendant 24 jours consécutifs, à midi, au même endroit.

Température	-10	-6	-5	-3	-1	0	2	4	8	10
Nombre de jours	1	2	2	2	3	3	4	4	1	2

Définition (Diagramme en boîte)**.** Un diagramme en boîte (ou boîte à moustaches) est un diagramme résumant quelques indicateurs d'une série statistique : médiane, quartiles, premier et neuvième déciles (ou valeurs extrêmes).



2.2 Moyenne et Écart-type

Définition (Variance)**.** Soit une série statistique de valeurs (x_i) et d'effectifs (n_i) (pour i allant de 1 à p), d'effectif total N et de moyenne $\bar{x}$. La *variance*, notée V, est le réel $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i-\bar{x})^2$.

Propriété (Formule pratique de la variance)**.**

$$V=\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{N}-\bar{x}^2$$

Exemple. Calcul de l'écart-type de l'exemple précédent.

Remarque. La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Définition (Écart-type)**.** On appelle *écart-type*, noté σ, la racine carrée de la variance : $\sigma=\sqrt{V}$.

2.3 Bilan

La médiane et l'écart type, d'une part, et la moyenne et l'écart-type, d'autre part, sont deux couples associant un indicateur de variation et un indicateur de dispersion.

Chapitre 7

Produit scalaire

1 Expressions et premières propriétés

TODO Voir quelle définition prendre avec les normes.

Définition. Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on appelle *produit scalaire* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$.

Propriété (Autres expressions)**.** Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$, on a :

— $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

— Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\,.\,||\overrightarrow{v}||\,.\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$

— Si $\overrightarrow{u} \neq 0$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1}$, où $\overrightarrow{v_1}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur la droite de direction $\overrightarrow{u}$.

Démonstration. *Démonstration*

□

Propriété (Avec des points)**.** Soient trois points A, B, C, distincts deux à deux. Alors :

— $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

— $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$, où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

2 Orthogonalité

Propriété. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

— Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

— Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Corollaire. Soient A, B, C, D quatre points, tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ si et seulement si (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

3 Règles de calcul

Propriété. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On note $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$.

Propriété (Règles de calcul)**.** Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs, et k un réel. Alors :

(i) Le produit scalaire est commutatif : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$

(ii) Le produit scalaire est distributif sur l'addition : $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}).\overrightarrow{u}$.

(iii) $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v})$.

(iv) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$

(v) $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$

(vi) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

Exemple (Théorème de Pythagore)**.** Soit ABC un triangle. Alors :

$$\begin{aligned} AB^2 &= \overrightarrow{AB}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 \end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = 0$ si et seulement si (AC) et (CB) sont perpendiculaires, donc $AB^2 = AC^2 + BC^2$ si et seulement si ABC est rectangle en C.

4 Applications dans un triangle

Théorème (Théorème d'Al Kashi)**.** Soit un triangle ABC. Alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\widehat{BAC}$$

Démonstration. TODO

□

Théorème (Théorème de la médiane)**.** Soient un triangle ABM, et I le milieu de $[AB]$. Alors

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Démonstration. TODO

$\square$

Chapitre 8

Variables aléatoires

1 Expérience aléatoire

Définition (Rappels)**.** L'ensemble de toutes les *issues* possibles d'une *expérience aléatoire* est appelée *univers*. Il est généralement noté Ω.

Définition (Évènement)**.** Un évènement est une partie de Ω : c'est un ensemble d'issues.

Exemple. On considère l'expérence aléatoire : on lance une pièce et un dés à quatre face, équilibrés.

- L'univers est $\{(P,1),(P,2),(P,3),(P,4),(F,1),(F,2),(F,3),(F,4)\}$.
- $(P,1)$ est une issue.
- Obtenir pile ; obtenir face et un nombre pair sont des évènements.

2 Opération sur les ensembles

TODO

3 Loi de probabilité

3.1 Définition

Définition (Loi de probabilité)**.** Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire. Définir une *loi de probabilité* P sur Ω, c'est associer, à chaque évènement élémentaire ω_i, des nombres $p_i \in [0,1]$, apelés *probabilité*, tels que $\Sigma_i p_i = p_1 + \ldots + p_n = 1$.

La probabilité d'un évènement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des évènements élémentaires ω_i qui composent A.

Propriété (Propriétés)**.** Soient A et B deux évènements d'un univers Ω. Alors :

- $p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right) - p\left(A \cap B\right)$;
- $p\left(\bar{A}\right) = 1 - p\left(A\right)$.

3.2 Équiprobabilité

Définition. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, ont dit qu'il y a *équiprobabilité*.

Propriété. Dans le cas d'équiprobabilité, en notant ω une issue et A un évènement d'un unviers Ω donné, on a :

$$p(\omega) = \frac{1}{\text{nombre d'issues de } \Omega} \qquad p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

3.3 Loi des grands nombres

Définition. Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle *fréquence d'apparition* d'une issue ω donnée le nombre : $f = \frac{\text{nombre d'apparitions de } \omega}{\text{nombre de répétitions de l'expérience}}$.

Propriété (Loi des grands nombres)**.** On répète n fois une expérience aléatoire donnée. La fréquence d'apparition f d'une issue ω tend vers $p(\omega)$ lorsque n augmente.

4 Variable aléatoire

Définition. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

— On appelle *variable aléatoire* toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel k.

— L'évènement noté $\{X = k\}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image k par X.

Exemple. On lance un dé équilibré à six faces. On mise 1 € et on obtient les gains suivants :

— 2 € si le nombre obtenu est pair ;

— 1 € si le nombre obtenu est 3 ;

— 3 € si le nombre obtenu est 5 ;
— -5 € si le nombre obtenu est 1.

La variable aléatoire X associée à ce jeu est :

— l'image de *« le nombre obtenu est pair »* par X est 1 ;
— l'image de *« le nombre obtenu est 3 »* par X est 0 ;
— l'image de *« le nombre obtenu est 5 »* par X est 2 ;
— l'image de *« le nombre obtenu est1 »* par X est -6.

Définition. Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité, et $\Omega' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X qui lui est associée. La *loi de probabilité* de X est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p'_i = p(X = x_i)$.

Exemple. La loi de probabilité de la variable aléatoire X de l'exemple précédent est :

x_i	-6	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

4.1 Indicateurs

Activité (Introduction à l'espérance)**.**

(a) Je joue 1002 fois au jeu de l'exemple précédent. Quel gain puis-je espérer ?
(b) Quel est la gain moyen d'une partie ?
(c) Comment exprimer ce gain à partir des seuls x_i et $p(X = x_i)$?
(d) Ai-je intérêt à jouer ?

Définition (Espérance)**.** L'*espérance* d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$, est le nombre $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)$.

Exemple. Avec la même variable aléatoire X, l'espérance de la variable, donc *le gain moyen d'une partie*, est : $E(X) = -6 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$.

Définition (Variance, Écart-type)**.**

— La *variance* d'une variable aléatoire X, notée $V(X)$, est le nombre $V(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(X = x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

— L'*écart-type* d'une variable aléatoire X, noté $\sigma(X)$, est le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple. Calculons l'écart-type de notre variable aléatoire X :

x_i	-6	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
x_i^2	36	0	1	4

Donc $V(X) = 36 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{257}{26}$ et $V(X) = \sqrt{\frac{257}{36}} \approx 2,7$.

Chapitre 9

Trigonométrie

1 Angles

1.1 Radian

Définition. La mesure en *radian* d'un angle de sommet O, est la longueur de l'arc de cercle de centre O et de rayon 1, incercepté par cet angle.

Exemple. TODO

Propriété (Conversion des degrés en radian)**.**

— Les mesures en degré et radian sont proportionnelles ;

— $360° = 2\pi$.

Exemple. TODO Conversion de degré en radian.

Exercice 10. Soit un angle de mesure α. On s'intéresse à la longueur l de l'arc de cercle de rayon r et d'angle de mesure α.

(a) Donner la formule permettant de calculer l à partir de α, si la mesure α est donnée en degrés.

(b) Même question, pour une mesure α donnée en radian.

(c) Commenter le résultat.

Oral. (a) Quelle est la dimension (unité) de la mesure d'un angle ?

(b) « Vraie » définition du radian.

(c) Vérification de la dimension.

1.2 Angle orienté

Définition. Dans le plan orienté, la mesure d'un angle orienté est positive si l'angle est dans le sens direct, et négative si elle est dans le sens indirect.

Définition. Étant donnés trois points A, B, C, on désigne par $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ l'angle orienté formé par les deux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.

Propriété. Étant donné un angle orienté de mesure α, les mesures $\alpha + 2k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$, sont aussi des mesures de cet angle.

Exemple. TODO

Définition (Mesure principale)**.** La mesure principale d'un angle orienté est la mesure de l'angle orienté appartenant à $]-\pi;\pi]$.

Méthode (Calcul de la mesure principale)**.** TODO

Propriété. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs non nuls. Alors, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$:

- $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = (-\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v}) + 2k\pi$
- $\begin{aligned}(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) &= (-\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) + \pi + 2k\pi \\ &= (\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v}) + \pi + 2k\pi\end{aligned}$
- $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}) + 2k\pi$
- Relation de Chasles : $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{w})$
- $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{u}) = 2k\pi$

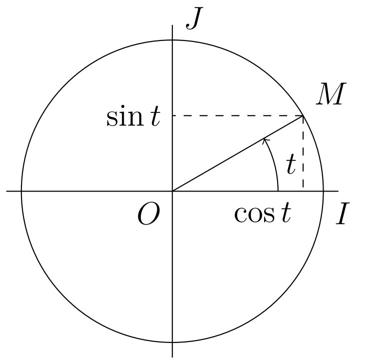
Exemple. Soit ABC un triangle. Alors :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) &= \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{AB};-\overrightarrow{AB}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB}\right) + \pi \\ &= \pi\end{aligned}$$

2 Sinus et cosinus

2.1 Cercle trigonométrique

Définition. On appelle *cercle trigonométrique* le cercle de centre O, de rayon 1.



Propriété. Soit M un point du cercle trigonométrique, la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ étant noté t. Ses coordonnées sont alors $\binom{\cos t}{\sin t}$.

Propriété. Pour tout réel t, on a : $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

2.2 Équations

Propriété. Soit un réel a. Les solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ sont $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété. Soit un réel a. Les solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ sont $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

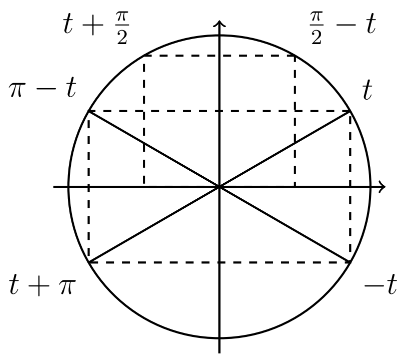
2.3 Angles associés

Propriété. Pour tout réel t, on a les relations suivantes.

$$\begin{cases} \cos(t + 2k\pi) = \cos t \\ \sin(t + 2k\pi) = \sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\pi - t) = -\cos t \\ \sin(\pi - t) = \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(-t) = \cos t \\ \sin(-t) = -\sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin t \\ \sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(t + \pi) = -\cos t \\ \sin(t + \pi) = -\sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t \\ \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t \end{cases}$$



Chapitre 10

Dérivation et Variation

Propriété. Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si sa dérivée est positive sur I ;
- f est décroissante sur I si et seulement si sa dérivée est négative sur I ;
- f est constante sur I si et seulement si sa dérivée est nulle sur I.

Définition. Soit une fonction f définie sur un intervalle I, et $\alpha \in I$. On dit que f admet un minimum (respectivement maximum) local en α si il existe un intervalle ouvert $]a; b[$ inclus dans I tel que, pour tout x de $]a; b[$, on a $f(x) \geqslant f(\alpha)$ (respectivement $f(x) \leqslant f(\alpha)$).

Corollaire. Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I, et $\alpha \in I$. Si f admet un extremum local en α, alors $f'(\alpha) = 0$.

Réciproquement, si f' s'annule en changeant de signe en α, alors f admet un extremum local en α.

Chapitre 11

Application au produit scalaire

1 Équations cartésiennes

1.1 Cercle

Propriété. Soit $[AB]$ un segment. Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan vérifiant les expressions suivantes, équivalentes :

(i) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$;

(ii) $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$ (où (x, y), (x_A, y_A), (x_B, y_B) sont les coordonnées respectives de M, A et B).

Propriété. Le cercle de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M du plan vérifiant l'une des expressions suivantes, équivalentes :

(i) $AM = r$

(ii) $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$ (où (x, y) et (x_A, y_A) sont les coordonnées respectives de M et A).

1.2 Droite

Définition. Un *vecteur normal* à une droite est un vecteur orthogonal à la direction de la droite.

Propriété. Soit une droite du plan d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Alors le vecteur de coordonnées (a, b) est normal à cette droite.

Démonstration. On sait que $\overrightarrow{u}(-b, a)$ est un vecteur directeur de cette droite. Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées (a, b). Alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -b \times a + a \times b = 0$. Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal à la droite.

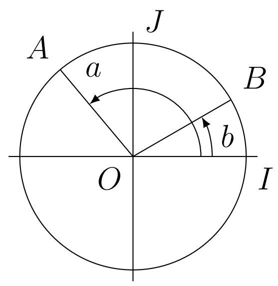
□

Propriété. Soient A et $\overrightarrow{u}$ un point et un vecteur du plan. La droite de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ passant par A est l'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = 0$.

2 Trigonométrie

Propriété. Soient a et b deux nombres réels.

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$



Démonstration.

Soient a et b deux réels, et A et B deux points tels que $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OB}) = b$. Alors les coordonnées de A et B dans le repère $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ orthonormé sont respectivement $(\cos a, \sin a)$ et $(\cos b, \sin b)$.

1. Commençons par démontrer que $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
   - Supposons que $0 \leqslant b \leqslant a < 2\pi$. Exprimons le produit scalaire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$ de deux manières différentes.
     — D'une part, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
     — D'autre part, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = OB.OA. \cos\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}\right)$. Or, on a :
     $$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}\right) &= \left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{\imath}\right) + \left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{OA}\right)\\ &= -\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{OA}\right)\\ &= -b + a\\ &= a - b\end{aligned}$$
     Donc $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos a - b$.

     Donc $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$.
   - Supposons maintenant que $0 \leqslant a \leqslant b < 2\pi$. Avec le même raisonnement, nous trouvons que $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$. Or $\cos(a - b) = \cos -(a - b) = \cos(b - a)$, donc nous retrouvons la formule précédente.

- Enfin, les cas où $a \notin [0; 2\pi[$ ou $b \notin [0; 2\pi[$ se déduisent des précédents en utilisant le fait que pour tout réel t, $\cos(t+2k\pi) = \cos t$ et $\sin(t+2k\pi) = \sin t$ (pour $k \in \mathbb{Z}$).

2. $\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
3. $\sin(a + b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a + b)) = \cos((\frac{\pi}{2} - a) - b)$.
   Donc $\sin(a + b) = \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cos b + \sin(\frac{\pi}{2} - a) \sin b = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
4. $\sin(a - b) = \sin(a + (-b)) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

$\square$

Corollaire (Duplication)**.** Soit a un réel.

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
- $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

Démonstration. Ce sont des applications de la propriété précédente, en prenant $b = a$, en considérant également l'égalité $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

$\square$

Chapitre 12

Généralités sur les suites

TODO représentation

1 Variations d'une suite

Propriété. Soit u une suite.

— u est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

— u est décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Propriété. Soit u une suite, telle que tous ses termes sont strictement positifs.

— u est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

— u est décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Propriété. Soient u une suite, et f une fonction telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_n = f(n)$.

— Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors u est croissante sur $\mathbb{N}$.

— Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors u est décroissante sur $\mathbb{N}$.

— La réciproque n'est pas vraie en général.

Exemple. TODO Exemple de réciproque vraie et fausse.

Définition (Notion de limite)**.** *Ces définitions ne sont pas formelles.*

— On dit qu'une suite u tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsqu'elle peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut (en prenant n suffisament grand). On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).

— On dit qu'une suite u tend vers un réel l lorsqu'elle peut prendre des valeurs v_n aussi proches de l que l'on veut (en prenant n suffisament grand). On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

2 Algorithmes

TODO
Valeur du terme de rang n (terme et somme)
Dépassement de seuil (terme et somme)

Chapitre 13

Loi binomiale — Échantillonnage

1 Loi de Bernoulli

Définition. Une *épreuve de Bernoulli* de paramètre p (compris entre 0 et 1) est une expérience aléatoire comportant deux issues (le succès et l'échec), telle que la probabilité de succès est égale à p.

Exemple.

— Le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée, où l'obtention de « pile » est un succès, est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

— Essayer de deviner la valeur d'une carte tirée au hasard dans un jeu de 52 cartes est une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{13}$.

Définition. À une épreuve de Bernoulli de paramètre p, on associe la variable aléatoire X comptabilisant le nombre de succès. On appelle *loi de Bernoulli* la loi suivie par cette variable aléatoire X.

Propriété. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Sa loi de probabilité est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(X=1) & = & p \\ P(X=0) & = & 1-p \\ P(X=x) & = & 0 \text{ si } x \text{ n'est ni 1, ni 0} \end{array}\right.$$

Propriété. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

- $E(X) = p$;
- $V(X) = p(1-p)$;
- $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

2 Loi binomiale

Définition. Soit une suite d'expériences aléatoires. Si le résultat d'une expérience ne dépend pas des précédentes, ces expériences sont dites *indépendantes*.

Définition. On appelle *schéma de Bernoulli* de paramètres n et p la répétition de n expériences de Bernoulli de paramètre p, indépendantes.

Exemple. Le lancer huit fois de suite d'une pièce de monnaie équilibrée, où l'obtention d'un pile représente un succès, est un schéma de Bernoulli de paramètres 8 et $\frac{1}{2}$.

Définition. À un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, on associe la variable aléatoire X comptabilisant le nombre de succès. On appelle *loi binomiale* la loi suivie par cette variable aléatoire X.

Définition (Coefficient binomial)**.** Soient k et n deux entiers naturels, tels que $k \leqslant n$. On considère l'arbre représentant un schéma de Bernoulli de coefficients n et p (pour un certain p réel de $[0, 1]$).

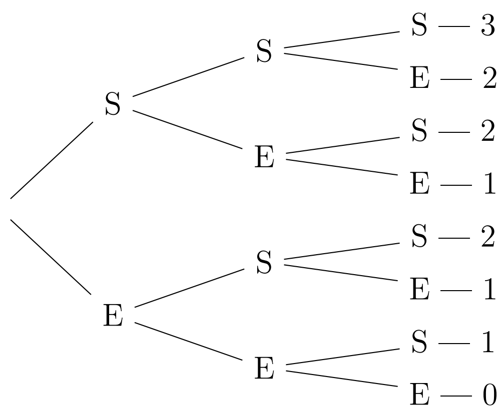
On appelle *coefficient binomial* de k et n le nombre de chemins de cet arbre réalisant k succès.

Exemple.

L'arbre ci-contre représente un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et p (par exemple, on lance une pièce de monnaies trois fois de suite). Les S représentent les succès, les E les échecs. Le nombre de droite correspond au nombre de succès de chaque branche.

Cet arbre nous donne les valeurs suivantes des coefficients binomiaux.

- $\binom{3}{0} = 1$
- $\binom{3}{1} = 3$
- $\binom{3}{2} = 3$
- $\binom{3}{3} = 1$



Propriété. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Sa loi de probabilité est :

$$\begin{cases} P(X = k) & = & \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ si } k \text{ est un entier compris entre 0 et } n \\ P(X = x) & = & 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On considère l'arbre correspondant au schéma de Bernoulli de paramètres n et p (où n est un entier, et p un réel).

Soit k un entier compris entre 0 et n. Par définition du coefficient binomial, $\binom{n}{k}$ branches comportent k succès. De plus, chacune de ces branches comporte k succès et $n-k$ échecs, donc sa probabilité est $p^k(1-p)^{n-k}$. En sommant les probabilités de ces branches, on obtient : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

□

Propriété. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

— $E(X)=np$

— $V(X)=np(1-p)$

— $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Propriété. Représentation graphique loi binomiale TODO

3 Coefficient binomial

Propriété. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est égal à $\binom{n}{k}$.

Pour cette raison, $\binom{n}{k}$ est parfois prononcé *« k parmi n »*.

Exemple.

— Sachant qu'une main de tarot (à cinq joueurs) est constituées de quinze cartes d'un jeu de soixante-dix-huit, le nombre de mains possible est égal à $\binom{78}{5}\approx 4,4\times 10^{15}$.

— Le tirage du loto est un tirage de sept numéros parmi quarante. Le nombre de tirages possibles est $\binom{40}{7}\approx 19\times 10^{8}$.

Propriété. Soient k et n deux entiers naturels, tels que $k\leqslant n$. Alors

(i) $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

(ii) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

(iii) $\binom{n}{1}=n$

(iv) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

(v) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

Corollaire. Pour calculer à la main les coefficients binomiaux, on peut tracer le triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

— les nombres aux extrémités de chaque ligne sont des 1 ;

— chaque autre nombre est la somme des deux nombres au dessus-de lui.

Comment lire cette figure : La valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est la $(k+1)^{\text{e}}$ valeur de la $(n+1)^{\text{e}}$ ligne.

4 Échantillonage

Activité. Activité informatique sur tableur.

Définition. Soient :

- X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres p et n ;
- a le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$;
- b le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

L'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ est appelé *intervalle de fluctuation à 95 % de* $\frac{X}{n}$.

Remarque. Cela signifie que la probabilité que la variable aléatoire $\frac{X}{n}$ appartienne à $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ est supérieure à 95 %. En d'autres termes : $P\left(a \leqslant X \leqslant b\right) \geqslant 0,95$.

Méthode (Règle de décision)**.** Soit une population dont on suppose qu'une proportion p des individus présente un certain caractère. On prélève un échantillon de n individus, et on note f la fréquence d'apparation de ce caractère dans cet échantillon.

On considère X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, et on note a et b les entiers tels que définis dans la définition précédente.

Si f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, l'hypothèse sur la valeur de la proportion p de la population rejetée au seuil de 5 % (il y a une probabilité de 5 % de faire une erreur en rejetant cette hypothèse). Sinon, elle est acceptable.