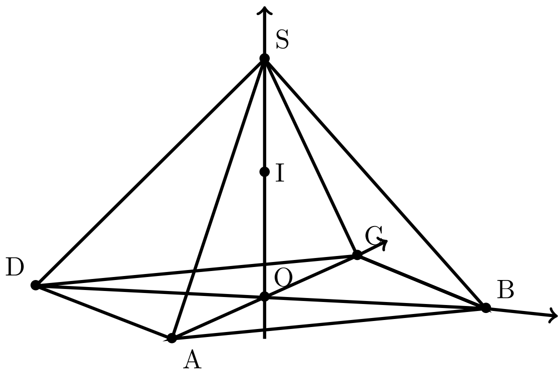
Exercice 1 (D'après le sujet de bac Amérique du nord, 1er juin 2016)**.**
On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec OB = 1.
On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

   Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment [SO].
   (a) Déterminer les coordonnées du point K.
   (b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.
   (c) On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).
   Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
   (d) Déterminer les coordonnées du point L.

3. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).
   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.
   (c) Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

Exercice 2 (D'après le sujet de bac Amérique du nord, 1er juin 2016)**.**
On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

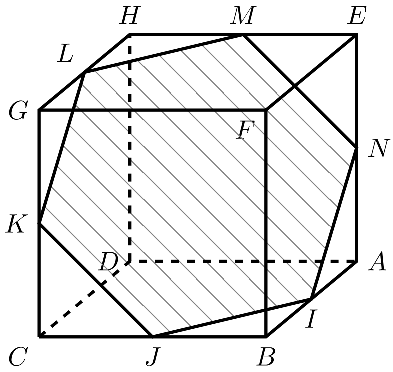
1. (a) Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :
$$P_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=1\right), P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right) \text{ et } P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=1\right).$$
   (b) Exprimer $P\left(X_{n+1}=1\right)$ en fonction de $P\left(X_n=0\right), P\left(X_n=1\right)$ et $P\left(X_n=2\right)$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :
$$R_n=\begin{pmatrix}P\left(X_n=0\right) & P\left(X_n=1\right) & P\left(X_n=2\right)\end{pmatrix}$$
et on considère M la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.
On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1}=R_n\times M$.
Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n=R_0\times M^n$.
3. On admet que $M=P\times D\times P^{-1}$ avec :
$$P=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$
Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n=P\times D^n\times P^{-1}$.
On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n=\begin{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
4. (a) Calculer $D^n\times P^{-1}$ en fonction de n.
   (b) Sachant que $R_0P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(X_n=0\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(X_n=1\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(X_n=2\right)$.
Interpréter ces résultats.

Exercice 3 (D'après le sujet de bac Antilles–Guyane, 20 juin 2016)**.**
On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par $f(x) = x\mathrm{e}^{1x^2}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.

Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.
   (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif,
   $$f(x) \leqslant g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leqslant 0.$$
   On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.
   (b) On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
   (c) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.
4. (a) La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
   (b) Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.
   (c) Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Exercice 4 (D'après le sujet de bac Antilles–Guyane, 20 juin 2016)**.**
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(D\ ;\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.
Dans ce repère, on a : $D(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $C(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $A(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $H(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $E(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$.
Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.
On admet que la section du cube par le plan $\mathcal{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.
3. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).
   (b) En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathcal{P}$ son sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.