Propriété. Soient k et n deux entiers naturels, tels que $k \leqslant n-1$. Alors $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Démonstration. Soint k et n deux entiers naturels, tels que $k \leqslant n-1$. Parmi les chemins de l'arbre représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n+1$ et p (pour un certain p), on s'intéresse à ceux comportant $k+1$ succès. Par définition du coefficient binomial, ils sont au nombre de $\binom{n+1}{k+1}$. Par exemple, $[\underbrace{S, S, E, \ldots S}_{k+1 \text{ succès}}]$ est un tel chemin.

On peut répartir ces chemins en deux ensembles.

Premièrement, on considère l'ensemble de ces chemins se terminant par un succès, dont fait partie par exemple $[\overbrace{\underbrace{S, S, E, \ldots, E}_{k \text{ succès}}, S}^{n+1 \text{ issues}}]$. Il y a k succès parmi les n premières issues, donc il y a autant de tels chemins que de chemins à k succès dans l'arbre du schéma de Bernoulli à n expériences, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$.

Ensuite, on considère l'ensemble des chemins se terminant par un échec, par exemple $[\overbrace{\underbrace{S, S, E, \ldots, E}_{k+1 \text{ succès}}, E}^{n+1 \text{ issues}}]$. Il y a $k+1$ succès parmi les n premières issues, donc le nombre de tels chemins est $\binom{n}{k+1}$.

Il n'y a pas d'autres possibilités, donc le nombre total de chemins est égal à la somme du nombre de chemins de nos deux catégories, c'est-à-dire : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

$\square$