Loi Binomiale

Exercice — Corrigé

On se demande quel évènement a le plus de chances de se produire (avec un dé équilibré à six faces) : « Obtenir au moins un 6 en quatre lancers » ; ou « Obtenir au moins deux 6 en huit lancers ».
Toutes les valeurs demandées seront arrondiées à 10^{-2}.

1. *On s'intéresse à l'expérience aléatoire « On lance quatre fois de suite un dé équilibré à six faces », et on appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de 6 obtenus.*
   (a) *Justifier que X suit une loi binomiale. Quels sont ses paramètres ?* Il s'agit d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes, donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 1/6$.
   (b) *Calculer $P(X = 0)$.*

$$P(X=0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-0}$$
$$\approx 0,48$$

   (c) *En déduire la valeur $P(X \geqslant 1)$.* Puisque les évènements $X = 0$ et $X \geqslant 1$ sont des évènements contraires, alors $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,48 \approx 0,52$.
2. *On considère la seconde expérience aléatoire : « On lance huit fois de suite un dé équilibré à six faces », et on appelle Y la variable aléatoire correspondant au nombre de 6 obtenus, et on admet qu'elle suit une loi binomiale de paramètres 8 et $\frac{1}{6}$.*

(a) *Calculer $P(Y=0)$ et $P(Y=1)$.*

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= \binom{8}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1-\frac{1}{6}\right)^{8-0} \\
&\approx 0,23 \\
P(Y=1) &= \binom{8}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(1-\frac{1}{6}\right)^{8-1} \\
&\approx 0,37
\end{aligned}$$

(b) *Montrer que $P(Y \leqslant 1) = 0,60$.*

$$\begin{aligned}
P(Y \leqslant 1) &= P(Y=0 \cup Y=1) \\
&= P(Y=0) + P(Y=1) \\
&\quad - P(Y=0 \cap Y=1) \\
&= 0,23 + 0,37 - 0 \\
&= 0,60
\end{aligned}$$

(c) *En déduire la valeur de $P(Y \geqslant 2)$.* Les évènements $Y \leqslant 1$ et $Y \geqslant 2$ sont contraires, donc :

$$\begin{aligned}
P(Y \geqslant 2) &= 1 - P(Y \leqslant 1) \\
&\approx 1 - 0,60 \\
&\approx 0,40
\end{aligned}$$

3. *Répondre au problème de l'énoncé.* $P(X \geqslant 1) \approx 0,52$, et $P(Y \geqslant 2) \approx 0,40$, donc il est plus probable d'avoir au moins un 6 en quatre lances qu'au moins deux 6 en huit lancers.