1 Loi de Bernoulli

Définition. Une *épreuve de Bernoulli* de paramètre p (compris entre 0 et 1) est une expérience aléatoire comportant deux issues (le succès et l'échec), telle que la probabilité de succès est égale à p.

Exemple.

— Le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée, où l'obtention de « pile » est un succès, est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

— Essayer de deviner la valeur d'une carte tirée au hasard dans un jeu de 52 cartes est une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{13}$.

Définition. À une épreuve de Bernoulli de paramètre p, on associe la variable aléatoire X comptabilisant le nombre de succès. On appelle *loi de Bernoulli* la loi suivie par cette variable aléatoire X.

Propriété. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Sa loi de probabilité est :

$$\begin{cases} P(X=1) &= p \\ P(X=0) &= 1-p \\ P(X=x) &= 0 \text{ si } x \text{ n'est ni 1, ni 0} \end{cases}$$

Propriété. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

- $E(X) = p$;
- $V(X) = p(1-p)$;
- $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

2 Loi binomiale

Définition. Soit une suite d'expériences aléatoires. Si le résultat d'une expérience ne dépend pas des précédentes, ces expériences sont dites *indépendantes*.

Définition. On appelle *schéma de Bernoulli* de paramètres n et p la répétition de n expériences de Bernoulli de paramètre p, indépendantes.

Exemple. Le lancer huit fois de suite d'une pièce de monnaie équilibrée, où l'obtention d'un pile représente un succès, est un schéma de Bernoulli de paramètres 8 et $\frac{1}{2}$.

Définition. À un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, on associe la variable aléatoire X comptabilisant le nombre de succès. On appelle *loi binomiale* la loi suivie par cette variable aléatoire X.

Définition (Coefficient binomial)**.** Soient k et n deux entiers naturels, tels que $k \leqslant n$. On considère l'arbre représentant un schéma de Bernoulli de coefficients n et p (pour un certain p réel de $[0,1]$).

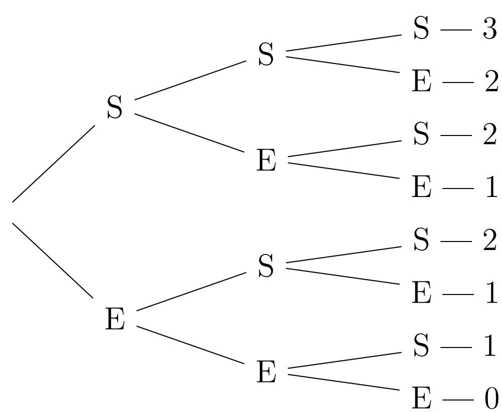
On appelle *coefficient binomial* de k et n le nombre de chemins de cet arbre réalisant k succès.

Exemple.

L'arbre ci-contre représente un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et p (par exemple, on lance une pièce de monnaies trois fois de suite). Les S représentent les succès, les E les échecs. Le nombre de droite correspond au nombre de succès de chaque branche.

Cet arbre nous donne les valeurs suivantes des coefficients binomiaux.

- $\binom{3}{0} = 1$
- $\binom{3}{1} = 3$
- $\binom{3}{2} = 3$
- $\binom{3}{3} = 1$



Propriété. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Sa loi de probabilité est :

$$\begin{cases} P(X=k) & = & \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ si } k \text{ est un entier compris entre 0 et } n \\ P(X=x) & = & 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On considère l'arbre correspondant au schéma de Bernoulli de paramètres n et p (où n est un entier, et p un réel).

Soit k un entier compris entre 0 et n. Par définition du coefficient binomial, $\binom{n}{k}$ branches comportent k succès. De plus, chacune de ces branches comporte k succès et $n-k$ échecs, donc sa probabilité est $p^k(1-p)^{n-k}$. En sommant les probabilités de ces branches, on obtient : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

$\square$

Propriété. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

- $E(X)=np$
- $V(X)=np(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Propriété. Représentation graphique loi binomiale TODO

3 Coefficient binomial

Propriété. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est égal à $\binom{n}{k}$.

Pour cette raison, $\binom{n}{k}$ est parfois prononcé « *k parmi n* ».

Exemple.

- Sachant qu'une main de tarot (à cinq joueurs) est constituées de quinze cartes d'un jeu de soixante-dix-huit, le nombre de mains possible est égal à $\binom{78}{5}\approx 4,4\times 10^{15}$.
- Le tirage du loto est un tirage de sept numéros parmi quarante. Le nombre de tirages possibles est $\binom{40}{7}\approx 19\times 10^{8}$.

Propriété. Soient k et n deux entiers naturels, tels que $k\leqslant n$. Alors

(i) $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

(ii) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

(iii) $\binom{n}{1}=n$

(iv) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

(v) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

Corollaire. Pour calculer à la main les coefficients binomiaux, on peut tracer le triangle de Pascal :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

— les nombres aux extrémités de chaque ligne sont des 1 ;

— chaque autre nombre est la somme des deux nombres au dessus-de lui.

Comment lire cette figure : La valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est la $(k+1)^{\text{e}}$ valeur de la $(n+1)^{\text{e}}$ ligne.

4 Échantillonage

Activité. Activité informatique sur tableur.

Définition. Soient :

- X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres p et n ;
- a le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$;
- b le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

L'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ est appelé *intervalle de fluctuation à 95 % de* $\frac{X}{n}$.

Remarque. Cela signifie que la probabilité que la variable aléatoire $\frac{X}{n}$ appartienne à $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ est supérieure à 95 %. En d'autres termes : $P\left(a \leqslant X \leqslant b\right) \geqslant 0,95$.

Méthode (Règle de décision)**.** Soit une population dont on suppose qu'une proportion p des individus présente un certain caractère. On prélève un échantillon de n individus, et on note f la fréquence d'apparation de ce caractère dans cet échantillon.

On considère X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, et on note a et b les entiers tels que définis dans la définition précédente.

Si f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, l'hypothèse sur la valeur de la proportion p de la population rejetée au seuil de 5 % (il y a une probabilité de 5 % de faire une erreur en rejetant cette hypothèse). Sinon, elle est acceptable.