1 Définition

Définition (Coefficient binomial)**.** Soient k et n deux entiers naturels, tels que $k \leqslant n$. On considère l'arbre représentant un schéma de Bernoulli de coefficients n et p (pour un certain p réel de $[0, 1]$).

On appelle *coefficient binomial* de k et n, noté $\binom{n}{k}$ (anciennement C_n^k), le nombre de chemins de cet arbre réalisant k succès.

Propriété (Dénombrement)**.** Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est égal à $\binom{n}{k}$.

Pour cette raison, $\binom{n}{k}$ est parfois prononcé *« k parmi n »*.

Exemple.

— Le nombre de couples de couleurs différentes parmi un choix de six couleurs est ....

— Le tirage du loto est un tirage de sept numéros parmi quarante. Le nombre de tirages possibles est ....

2 Propriétés

2.1 Travail préliminaire

Réaliser, sur une feuille de brouillon, *proprement*, les arbres correspondant à deux schéma de Bernoulli de paramètres respectifs $n = 3$ et p d'une part, et $n = 4$ et p d'autre part.

2.2 Valeurs « remarquables »

Pour chacune des questions suivantes, essayer d'abord avec des valeurs de n particulières (par exemple $n = 2$, $n = 3$), puis en déduire une généralisation avec un n quelconque.

Soit un schéma de Bernoulli de coefficients n et p (pour un entier strictement positif n, et un réel p de $[0; 1]$).

1. Donner toutes les issues possibles à 0 succès. En déduire $\binom{n}{0}$.
2. Donner toutes les issues possibles à 1 succès. En déduire $\binom{n}{1}$.
3. Donner toutes les issues possibles à n succès. En déduire $\binom{n}{n}$.

2.3 Coefficients « symétriques »

1. Soit un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p \in [0; 1]$.
   (a) Lister tous les évènements possibles à 1 succès, puis tous les évènements possibles à $3 - 1$ succès. Apparier les éléments des deux listes.
   (b) En déduire une relation entre $\binom{3}{1}$ et $\binom{3}{2}$.
2. Mêmes questions avec $n = 4$, et les évènements à 3 succès d'une part, puis les évènements à $4 - 3$ succès d'autre part.
3. En déduire une relation entre $\binom{n}{p}$ et $\binom{n}{n-p}$ (pour un entier p de $[0; n]$).

2.4 Calcul pratique de coefficients binomiaux

1. On s'intéresse à l'arbre correspondant à un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et p quelconque.
   (a) Masquer les branches les plus à droite de l'arbre. La partie visible correspond à un arbre d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$, pour le même p.
   (b) Marquer en rouge les chemins à un succès. En déduire $\binom{2}{1}$.
   (c) Marquer en vert les chemins à zéro succès. En déduire $\binom{2}{0}$.
   (d) Révéler la partie droite de l'arbre, compter les branches à deux succès, et en déduire $\binom{3}{1}$.
   (e) En déduire une relation entre $\binom{3}{1}$, $\binom{2}{1}$ et $\binom{2}{0}$.
2. On s'intéresse à l'abre correspondant à un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$, et p quelconque.

(a) Masquer les branches les plus à droite de l'arbre.

(b) Marquer en rouge les chemins à trois succès. En déduire $\binom{3}{3}$.

(c) Marquer en rouge les chemins à deux succès. En déduire $\binom{3}{2}$.

(d) Révéler la partie droite de l'arbre, compter les branches à trois succès, et en déduire $\binom{4}{3}$.

(e) En déduire une relation entre $\binom{4}{3}$, $\binom{3}{3}$ et $\binom{3}{2}$.

3. *Généralisation :* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier dans $[0; n]$. Exprimer $\binom{n+1}{p}$ en fonction de $\binom{n}{?}$ et $\binom{n}{?}$ (en remplaçant les ? par les bonnes valeurs).

3 Triangle de Pascal

4 Bilan

Propriété. Soient k et n deux entiers naturels, tels que $k \leqslant n$. Alors

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \dots$

(ii) $\binom{n}{1} = \dots$

(iii) $\binom{n}{n-k} = \dots$

(iv) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \dots$