

LOI BINOMIALE, VOYANCE ET SISMOLOGIE

Schéma de Bernoulli

Les données de cette activité sont issues de Devenez sorciers, devenez savants (pages 105 à 107), d'Henri Broch et Georges Charpak, éditions Odile Jacob, 2002.

Un individu se revendique astrologue, et fait des prévisions pour les années à venir. En particulier, pour les années 1994, 1995 et 1996 (cette dernière année étant bissextile), il avait annoncé 169 jours sismiques dans le monde. Selon le *National Earthquake Information Service* (États-Unis), au cours de cette période, sur le même territoire, il y a eu 196 jours de séisme (en ne considérant que ceux dont la magnitude est supérieure ou égale à 6,5), dont 33 coïncident avec les prédictions de notre voyant. Nous allons étudier cette prédiction sous l'angle des probabilités.

L'hypothèse que nous allons étudier au cours de cette activité est :
« Pouvons nous affirmer que l'astrologue a un don ? »

1 Expérience élémentaire

On choisit une date au hasard parmi les trois années considérées (les dates étant équiprobables). Quelle est la probabilité d'obtenir une date de séisme ?

2 Répétition d'expériences

Dans toute la suite, on appelle « succès » (noté **S**) le fait d'obtenir une date de séisme, et « échec » (noté **E**) le fait d'obtenir une date sans séisme. On note, par exemple **SSE** l'évènement « obtenir deux succès puis un échec, dans cet ordre ».

2.1 Trois répétitions

On répète l'expérience précédente trois fois de suite (c'est-à-dire : on choisit, au hasard, trois dates).

1. Évènements élémentaires

- (a) Dessiner l'arbre représentant cette nouvelle expérience.

- (b) Calculer $P(SSE)$, $P(SES)$, $P(ESS)$. Quelle est la probabilité d'obtenir deux succès ?
 - (c) Calculer $P(SSS)$. Quelle est la probabilité d'obtenir trois succès ?
2. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès sur les trois répétitions.
- (a) Dresser la loi de probabilités de X .
 - (b) Calculer l'espérance de X , et interpréter ce résultat.

2.2 Cent-soixante-neuf répétitions

On répète maintenant cent-soixante-neuf fois l'expérience (correspondant aux 169 prédictions de l'astrologue). Notons que cette répétition est faite avec remise : on peut tomber plusieurs fois sur la même date (mais on suppose que puisque la probabilité d'obtenir plusieurs fois la même date est faible, cela ne changera quasiment pas le résultat, et on ignore ce cas là). On appelle Z la variable aléatoire représentant le nombre de succès.

L'arbre correspondant à cette expérience contient des milliards de milliards de branches (environ 10^{51}); nous allons nous en passer.

1. Quelles valeurs peut prendre Z ?
2. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 169)$.
3. Évènement « $Z=33$ »
 - (a) Donner un exemple d'issue correspondant à cet évènement, et calculer sa probabilité.
 - (b) En utilisant les questions précédente, quelle information nous manque-t-il pour calculer $P(Z = 33)$?
 - (c) On appelle *coefficient binomial de 33 et 169*, noté $\binom{169}{33}$, le nombre de branches de l'arbre à 33 succès. On donne : $\binom{169}{33} \approx 1,3436 \times 10^{35}$.
4. Quelle était la probabilité, en faisant une « prédiction » de 33 dates au hasard, d'obtenir le même nombre de bonnes réponses que l'astrologue ?
5. À ce stade, peut-on confirmer ou infirmer que le prétendu astrologue a fait preuve de ses pouvoirs ?