Suites arithmético-géométriques

Exercice 1. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = & 7 \\ u_{n+1} = & 3u_n + 8 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

L'objet de l'exercice est de calculer u_{100}.

1. Calculer u_1 et u_2, puis montrer que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 4$.

2. Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. En déduire le terme général de u, puis calculer u_{100} (ne garder que deux chiffres significatifs).

Exercice 1 (Corrigé)**.**

1. $u_1 = 3 \times u_0 + 8 = 3 \times 7 + 8 = 29$; $u_2 = 3 \times u_1 + 8 = 3 \times 29 + 8 = 95$. Puisque $u_1 - u_0 = 22$ et $u_2 - u_1 = 66$, la suite n'est pas arithmétique. Puisque $\frac{u_1}{u_0} \approx 4,1$ et $\frac{u_2}{u_1} \approx 3,3$, alors la suite n'est pas géométrique.
2. On cherche à montrer que $v_{n+1} = qv_n$ (où q est un nombre à déterminer). Deux méthodes, équivalentes, sont proposées.

   Méthode 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 4 \\ &= 3u_n + 8 + 4 \\ &= 3u_n + 12 \end{aligned}$$

   Pour faire « apparaître » le terme v_n (qui est égal à $u_n + 4$), on factorise par 3.

   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= 3u_n + 3 \times \frac{12}{3} \\ &= 3\left(u_n + 4\right) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Donc la suite v est géométrique, de premier terme $v_0 = u_0 + 4 = 11$ et de raison 3.

Méthode 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 4 \\ &= 3u_n + 8 + 4 \\ &= 3u_n + 12 \end{aligned}$$

Or, puisque $v_n = u_n + 4$, alors $u_n = v_n - 4$, donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 3\left(v_n - 4\right) + 12 \\ &= 3v_n - 4 \times 3 + 12 \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Donc la suite v est géométrique, de premier terme $v_0 = u_0 + 4 = 11$ et de raison 3.

3. Puisque la suite v est géométrique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = 11 \times 3^n$. Et, puisque $v_n = u_n + 4$, alors $u_n = v_n - 4$ et $u_n = 11 \times 3^n - 4$.
   Donc $u_{100} = 11 \times 3^{100} - 4 \approx 5,7 \times 10^{48}$.

Exercice 2. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = & 0,15 \\ u_{n+1} = & 0,68u_n + 0,12 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

L'objet de l'exercice est de calculer u_{100}.

1. Calculer u_1 et u_2, puis montrer que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 0,375$.

2. Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. En déduire le terme général de u, puis calculer u_{100} (ne garder que deux chiffres significatifs).