# 1 Équations cartésiennes

## 1.1 Cercle

**Propriété.** Soit $[AB]$ un segment. Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points $M$ du plan vérifiant les expressions suivantes, équivalentes :

(i) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ ;

(ii) $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$ (où $(x, y)$, $(x_A, y_A)$, $(x_B, y_B)$ sont les coordonnées respectives de $M$, $A$ et $B$).

**Propriété.** Le cercle de centre $A$ et de rayon $r$ est l'ensemble des points $M$ du plan vérifiant l'une des expressions suivantes, équivalentes :

(i) $AM = r$

(ii) $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = r^2$ (où $(x, y)$ et $(x_A, y_A)$ sont les coordonnées respectives de $M$ et $A$).

## 1.2 Droite

**Définition.** Un *vecteur normal* à une droite est un vecteur orthogonal à la direction de la droite.

**Propriété.** Soit une droite du plan d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Alors le vecteur de coordonnées $(a, b)$ est normal à cette droite.

**Démonstration**. On sait que $\overrightarrow{u}(-b, a)$ est un vecteur directeur de cette droite. Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées $(a, b)$. Alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -b \times a + a \times b = 0$. Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal à la droite.

$\square$

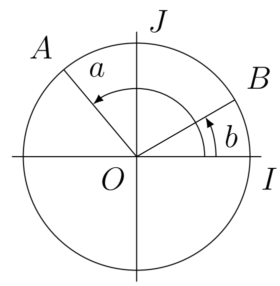
**Propriété.** Soient $A$ et $\overrightarrow{u}$ un point et un vecteur du plan. La droite de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ passant par $A$ est l'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = 0$.

# 2 Trigonométrie

**Propriété.** Soient $a$ et $b$ deux nombres réels.

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$




- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

**Démonstration**.

Soient $a$ et $b$ deux réels, et $A$ et $B$ deux points tels que $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OB}) = b$. Alors les coordonnées de $A$ et $B$ dans le repère $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ orthonormé sont respectivement $(\cos a, \sin a)$ et $(\cos b, \sin b)$.

1. Commençons par démontrer que $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
   - Supposons que $0 \leqslant b \leqslant a < 2\pi$. Exprimons le produit scalaire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$ de deux manières différentes.
     — D'une part, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
     — D'autre part, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = OB.OA.\cos\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}\right)$. Or, on a :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}\right) &= \left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{\imath}\right) + \left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{OA}\right) \\ &= -\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{OA}\right) \\ &= -b + a \\ &= a - b\end{aligned}$$

     Donc $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos a - b$.

   Donc $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$.
   - Supposons maintenant que $0 \leqslant a \leqslant b < 2\pi$. Avec le même raisonnement, nous trouvons que $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$. Or $\cos(a-b) = \cos -(a-b) = \cos(b-a)$, donc nous retrouvons la formule précédente.
   - Enfin, les cas où $a \notin [0; 2\pi[$ ou $b \notin [0; 2\pi[$ se déduisent des précédents en utilisant le fait que pour tout réel $t$, $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$ et $\sin(t + 2k\pi) = \sin t$ (pour $k \in \mathbb{Z}$).
2. $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

3. $\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) = \cos((\frac{\pi}{2} - a) - b)$.
   Donc $\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos b + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin b = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
4. $\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

$\square$

**Corollaire** (Duplication)**.** Soit $a$ un réel.

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
- $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

**Démonstration**. Ce sont des applications de la propriété précédente, en prenant $b = a$, en considérant également l'égalité $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

$\square$