1 Expérience aléatoire

Définition (Rappels)**.** L'ensemble de toutes les *issues* possibles d'une *expérience aléatoire* est appelée *univers*. Il est généralement noté Ω.

Définition (Évènement)**.** Un évènement est une partie de Ω : c'est un ensemble d'issues.

Exemple. On considère l'expérence aléatoire : on lance une pièce et un dés à quatre face, équilibrés.

— L'univers est $\{(P,1),(P,2),(P,3),(P,4),(F,1),(F,2),(F,3),(F,4)\}$.

— $(P,1)$ est une issue.

— Obtenir pile ; obtenir face et un nombre pair sont des évènements.

2 Opération sur les ensembles

TODO

3 Loi de probabilité

3.1 Définition

Définition (Loi de probabilité)**.** Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire. Définir une *loi de probabilité* P sur Ω, c'est associer, à chaque évènement élémentaire ω_i, des nombres $p_i \in [0,1]$, apelés *probabilité*, tels que $\Sigma_i p_i = p_1 + \ldots + p_n = 1$.

La probabilité d'un évènement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des évènements élémentaires ω_i qui composent A.

Propriété (Propriétés)**.** Soient A et B deux évènements d'un univers Ω. Alors :

- $p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right) - p\left(A \cap B\right)$;
- $p\left(\bar{A}\right) = 1 - p\left(A\right)$.

3.2 Équiprobabilité

Définition. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, ont dit qu'il y a *équiprobabilité*.

Propriété. Dans le cas d'équiprobabilité, en notant ω une issue et A un évènement d'un unviers Ω donné, on a :

$$p(\omega) = \frac{1}{\text{nombre d'issues de } \Omega} \qquad\qquad p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

3.3 Loi des grands nombres

Définition. Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle *fréquence d'apparition* d'une issue ω donnée le nombre : $f = \frac{\text{nombre d'apparitions de } \omega}{\text{nombre de répétitions de l'expérience}}$.

Propriété (Loi des grands nombres)**.** On répète n fois une expérience aléatoire donnée. La fréquence d'apparition f d'une issue ω tend vers $p(\omega)$ lorsque n augmente.

4 Variable aléatoire

Définition. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

— On appelle *variable aléatoire* toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel k.

— L'évènement noté $\{X = k\}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image k par X.

Exemple. On lance un dé équilibré à six faces. On mise 1 € et on obtient les gains suivants :

— 2 € si le nombre obtenu est pair ;

— 1 € si le nombre obtenu est 3 ;

— 3 € si le nombre obtenu est 5 ;

— -5 € si le nombre obtenu est 1.

La variable aléatoire X associée à ce jeu est :

— l'image de *« le nombre obtenu est pair »* par X est 1 ;

— l'image de *« le nombre obtenu est 3 »* par X est 0 ;

— l'image de *« le nombre obtenu est 5 »* par X est 2 ;

— l'image de *« le nombre obtenu est1 »* par X est -6.

Définition. Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité, et $\Omega' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X qui lui est associée. La *loi de probabilité* de X est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p'_i = p(X = x_i)$.

Exemple. La loi de probabilité de la variable aléatoire X de l'exemple précédent est :

x_i	-6	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

4.1 Indicateurs

Activité (Introduction à l'espérance)**.**

(a) Je joue 1002 fois au jeu de l'exemple précédent. Quel gain puis-je espérer ?

(b) Quel est la gain moyen d'une partie ?

(c) Comment exprimer ce gain à partir des seuls x_i et $p(X = x_i)$?

(d) Ai-je intérêt à jouer ?

Définition (Espérance)**.** L'*espérance* d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$, est le nombre $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)$.

Exemple. Avec la même variable aléatoire X, l'espérance de la variable, donc *le gain moyen d'une partie*, est : $E(X) = -6 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$.

Définition (Variance, Écart-type)**.**

— La *variance* d'une variable aléatoire X, notée $V(X)$, est le nombre $V(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(X = x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

— L'*écart-type* d'une variable aléatoire X, noté $\sigma(X)$, est le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple. Calculons l'écart-type de notre variable aléatoire X :

x_i	-6	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
x_i^2	36	0	1	4

Donc $V(X) = 36 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{257}{26}$ et $V(X) = \sqrt{\frac{257}{36}} \approx 2,7$.