1 Expressions et premières propriétés

TODO Voir quelle définition prendre avec les normes.

Définition. Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on appelle *produit scalaire* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$.

Propriété (Autres expressions)**.** Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$, on a :

— $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

— Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$

— Si $\overrightarrow{u} \neq 0$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1}$, où $\overrightarrow{v_1}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur la droite de direction $\overrightarrow{u}$.

Démonstration. *Démonstration*

□

Propriété (Avec des points)**.** Soient trois points A, B, C, distincts deux à deux. Alors :

— $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

— $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$, où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

2 Orthogonalité

Propriété. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

— Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

— Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Corollaire. Soient A, B, C, D quatre points, tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ si et seulement si (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

3 Règles de calcul

Propriété. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On note $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$.

Propriété (Règles de calcul)**.** Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs, et k un réel. Alors :

(i) Le produit scalaire est commutatif : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$

(ii) Le produit scalaire est distributif sur l'addition : $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}).\overrightarrow{u}$.

(iii) $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v})$.

(iv) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$

(v) $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$

(vi) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

Exemple (Théorème de Pythagore)**.** Soit ABC un triangle. Alors :

$$\begin{aligned} AB^2 &= \overrightarrow{AB}^2 \\ &= (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})^2 \\ &= \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 \end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = 0$ si et seulement si (AC) et (CB) sont perpendiculaires, donc $AB^2 = AC^2 + BC^2$ si et seulement si ABC est rectangle en C.

4 Applications dans un triangle

Théorème (Théorème d'Al Kashi)**.** Soit un triangle ABC. Alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\widehat{BAC}$$

Démonstration. TODO

$\square$

Théorème (Théorème de la médiane)**.** Soient un triangle ABM, et I le milieu de $[AB]$. Alors

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Démonstration. TODO

$\square$