Exercice 1 (Dérivation)**.** Dériver les fonctions suivantes.

$g_4(x) = \frac{1}{4x}$

Méthode 1 Écrivons la fonctions sous la forme $g_4(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{x}$. Puisque la dérivée de la fonction inverse est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, alors $g_4'(x) = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{4x^2}$.

Méthode 2 On pose $u(x) = 4x$, et donc $u'(x) = 4$. La dérivée de $\frac{1}{u}$ est $-\frac{u'}{u^2}$, donc $g_4'(x) = -\frac{4}{(4x)^2} = -\frac{4}{4 \times 4x^2} = -\frac{1}{4x^2}$

$h_1(x) = (x+1)(x-8)$ On pose $u(x) = x+1$ et $v(x) = x-8$. Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$, et $h_1(x)$ peut s'écrire $h_1(x) = u(x) \times v(x)$. Donc sa dérivée est égale à :

$$\begin{aligned}
h_1'(x) &= u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x) \\
&= 1 \times (x-8) + 1 \times (x+1) \\
&= x - 8 + x + 1 \\
&= 2x - 7
\end{aligned}$$

$h_2(x) = x\sqrt{x}$ On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Alors $u'(x) = 1$, et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, et $h_2(x)$ peut s'écrire $h_2(x) = u(x) \times v(x)$. Donc sa dérivée est égale à :

$$\begin{aligned}
h_2'(x) &= u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x) \\
&= 1 \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x \\
&= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\
&= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{x}
\end{aligned}$$

$h_3(x) = \frac{x^2}{3x-1}$ On pose $u(x) = x^2$, et $v(x) = 3x-1$. Alors $u'(x) = 2x$, et $v'(x) = 3$, et $h_3(x)$ peut s'écrire comme $h_3(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Donc :

$$\begin{aligned}
h_3'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v(x)^2} \\
&= \frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2} \\
&= \frac{6x^2 - 2x - 3x^2}{(3x-1)^2} \\
&= \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}
\end{aligned}$$

$h_4(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ On pose $u(x) = \sqrt{x}$, et $v(x) = x$. Alors $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 1$, et $h_4(x)$ est peut s'écrire comme $h_4(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Donc on a :

$$\begin{aligned}
h_4'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v(x)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times x - 1 \times \sqrt{x}}{x^2} \\
&= \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{x^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x^2} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}{x \times \sqrt{x}\sqrt{x}} \\
&= -\frac{1}{2x\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$h_5(x) = \frac{3x-1}{x+4}$ On pose $u(x) = 3x - 1$, et $v(x) = x + 4$. Alors $u'(x) = 3$, $v'(x) = 1$, et $h_5(x) = u(x) \times v(x)$. Donc :

$$\begin{aligned}
h_5'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v(x)^2} \\
&= \frac{3(x+4) - 1(3x-1)}{(x+4)^2} \\
&= \frac{3x + 12 - 3x + 1}{(x+4)^2} \\
&= \frac{13}{(x+4)^2}
\end{aligned}$$