Méthodologie

Caractérisations d'une droite

Comment passer de l'une à l'autre des caractérisations d'une droite $\mathcal{D}$ du plan ?

Deux points $\longleftrightarrow$ Un point et vecteur directeur

$\rightarrow$ La droite passant par A et B est également caractérisée par A et $\overrightarrow{AB}$.

$\leftarrow$ Réciproquement, la droite définie par A et $\overrightarrow{u}$ est également définie par A et l'image de A par $\overrightarrow{u}$.

Un point et vecteur directeur $\longleftrightarrow$ Équation cartésienne

$\rightarrow$ La droite définie par A et $\overrightarrow{u}$ (de coordonnées (x_u,y_u)) est constituées des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires. Exprimer et réduire la condition de colinéarité entre $\overrightarrow{AM}(x-x_A,y-y_A)$ et $\overrightarrow{u}$ donne l'équation cartésienne de la droite.

$\leftarrow$ Réciproquement, une droite définie par $ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(-b,a)$; on trouve ensuite un point appartenant à cette droite (par exemple en choisissant arbitrairement x, puis en résolvant $ax+by+c=0$ pour trouver y).

Équation cartésienne $\longleftrightarrow$ Équation réduite

$\rightarrow$ Pour passer de l'équation cartésienne $ax+by+c=0$ à l'équation réduite, on isole le y si cela est possible, le x sinon.

$\leftarrow$ Réciproquement, étant l'équation réduite, on passe à l'équation cartésienne en passant tous les membres du même côté de l'équation.

Équation réduite $\longleftrightarrow$ Deux points

$\rightarrow$ Étant donné l'équation réduite, on trouve deux points distincts vérifiant cette équation (par exemple en prenant arbitrairement x puis en résolvant l'équation pour trouver y, deux fois de suite).

$\leftarrow$ Réciproquement, soient deux points A et B. Si A et B ont des ordonnées différentes, l'équation réduite est $y=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}x+b$; pour trouver b, on résout l'équation en remplaçant x et y par x_A et y_A (par exemple). Si A et B ont même ordonnée, l'équation réduite est $x=x_A$.

Équation cartésienne $\longleftrightarrow$ Deux points

$\rightarrow$ Comme avec l'équation réduite, le plus simple est, pour chacun des points, de prendre arbitrairement une valeur de x (ou y), et résoudre l'équation pour avoir la seconde coordonnées).

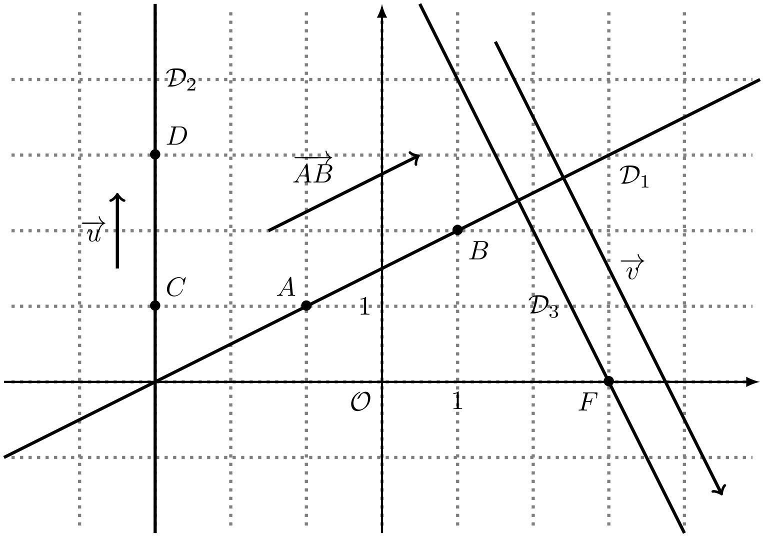
$\leftarrow$ Pour la réciproque, le plus simple est de commencer par déterminer un vecteur directeur de la droite d'abord, avant d'appliquer la méthode expliquée plus haut.

Équation réduite $\longleftrightarrow$ Un point et un vecteur directeur

- $\rightarrow$ Un vecteur directeur d'une droite d'équation $y = mx + p$ est a pour coordonnées $(1, m)$; un vecteur dircteur d'une droite d'équation $x = x_0$ a pour coordonnées $(0, 1)$. On prend ensuite arbitrairement un point vérifiant l'équation.
- $\leftarrow$ Pour la réciproque, il est sans doute plus simple de passer par l'équation cartésienne.

Exemples

Pour chacune des trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, on va donner trois autres caractérisations.



Droite $\mathcal{D}_1$, définie par les points $A(-1{,}1)$ et $B(1{,}2)$.

- Point et vecteur directeur : Elle est aussi définie par le point A et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(2{,}1)$.
- Équation cartésienne : Elle est constituée des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires (ces vecteurs ont pour coordonnées $\overrightarrow{AM}(x+1;y-1)$ et $\overrightarrow{AB}(2{,}1)$). La condition de colinéarité est $(x+1)\times 1-(y-1)\times 2=0$, ce qui donne, une fois réduit $x-2y+3=0$.
- Équation réduite : En isolant y dans l'équation cartésienne, on obtient : $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

Droite $\mathcal{D}_2$, définie par son équation réduite $x=-3$.

- Équation cartésienne : Pour trouver son équation cartésienne, on fait passer tous les membres du même côté de l'égalité : $x+3=0$.
- Deux points : Pour trouver sa caractérisation par deux points, on choisit arbitrairement deux points vérifiant l'équation réduite $x=-3$: $C(-3{,}1)$ et $D(-3{,}3)$ conviennent.
- Point et vecteur directeur, à partir de l'équation cartésienne : on remarque qu'elle peut s'écrire $x+0y+3=0$. Un vecteur directeur est donc le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(0{,}1)$.

Droite $\mathcal{D}_3$, définie par son équation cartésienne $2x+y-6=0$.

- Équation réduite : en isolant y dans l'équation cartésienne, on obtient : $y=-2x+6$.

- Deux points : on choisit arbitrairement deux points distincts E et F vérifiant l'équation réduite. Il est souvent commode de prendre deux points respectivement d'abscisse et d'ordonnée nulles, par exemple $E(0{,}6)$ et $F(3{,}0)$.
- Enfin, les coordonnées d'un vecteur directeur peuvent être calculées à partir de ces deux points : $EF(3{,}-6)$.