Remarque. Le plan est muni d'un repère (O, I, J) quelconque (pas nécessairement normé, pas nécessairement orthogonal).

1 Colinéarité

Définition. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *colinéaires* si et seulement si il existe k réel tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Propriété.

(i) Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire avec tout vecteur $\overrightarrow{u}$.

(ii) Si deux vecteurs (non nuls) sont colinéaires, tout vecteur (non nul) colinéaire à l'un est colinéaire à l'autre.

(iii) (HP) On dit que la colinéarité est une *relation transitive* parmi les vecteurs non nuls.

Démonstration.(partielle…)

(i) Pour n'importe quel vecteur $\overrightarrow{u}$, on a : $\overrightarrow{0} = 0 \times \overrightarrow{u}$.

□

Propriété (Condition de colinéarité)**.** Deux vecteurs $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Démonstration.

Premier cas : l'un des deux vecteurs est nul . Alors ses coordonnées sont $\binom{0}{0}$, les deux vecteurs sont colinéaires, et nécessairement $xy' - x'y = 0$.

Second cas : les deux vecteurs sont non nuls . Soient $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$, non nuls, colinéaires, et k le réel tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$. Alors $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$, et $xy' - x'y = kx'y' - kx'y' = 0$.

La réciproque est laissée au lecteur patient…

□

2 Équations de droites

Activité (TODO À voir)**.** Soit une droite définie par deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. À quelle condition un point $M(x, y)$ appartient-il à $\mathcal{D}$?

Le point M appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si A, B et M sont alignés, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

TODO

…si et seulement si $ax + by + c = 0$.

Définition et Propriété. Toute droite $\mathcal{D}$ du plan admet une équation *cartésienne* de la forme $ax + by + c = 0$, où l'un (au moins) des nombres a et b est non nul. La droite est constituée de l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation.

Définition et Propriété.

- On appelle *vecteur directeur* d'une droite $\mathcal{D}$ du plan tout vecteur $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de $\mathcal{D}$.
- Une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet un vecteur directeur de coordonnées $(-b; a)$.

Propriété (Caractérisation d'une droite)**.** Une droite du plan peut-être caractérisée par :

- deux points distincts ;
- un point et un vecteur directeur (non nul) ;
- une équation cartésienne ;
- une équation réduite.

Seule la caractérisation par équation réduite est unique.

3 Décomposition de vecteurs

Propriété. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Alors tout vecteur $\overrightarrow{w}$ peut être décomposé de façon unique comme $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$, où a et b sont réels.

Définition.

(i) On appelle *repère du plan* la donnée d'un point O et de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

(ii) Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ s'écrit aussi : « M a pour coordonnées (a, b) dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ».

Propriété.

(i) Une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(x; y)$ (avec $x \neq 0$) a pour coefficient directeur $\frac{y}{x}$.

(ii) Une droite de coefficient directeur m a un vecteur directeur de coordonnées $(1; m)$.

Propriété. Soient d_1 et d_2 deux droites. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) Les deux droites sont parallèles.

(ii) Les deux droites ont deux vecteurs directeurs colinéaires.

(iii) Les deux droites ont tous leurs vecteurs directeurs colinéaires.

(iv) S'ils existent, les coefficents directeurs des deux droites sont égaux.