

Autoévaluation — Caractérisation de droites — Énoncé

Cours Quelles sont les quatre manières vues en classe de caractériser une droite du plan ? Parmi celles-ci, lesquelles sont uniques ?

Application directe Pour chacune des droites suivantes, donner un exemple de chacune des trois autres caractérisations possibles.

\mathcal{D}_1 : droite passant par $A(1, 1)$ et $B(-3, 2)$.

\mathcal{D}_2 : droite passant par $C(2, 3)$, de vecteur directeur $\vec{u}(4, 2)$.

\mathcal{D}_3 : droite d'équation $x = 7$.

\mathcal{D}_4 : droite d'équation $\frac{1}{2}x - y + 2 = 0$.

Correction

Cours Les caractérisations sont : (i) deux points, (ii) un point et un vecteur directeur, (iii) l'équation réduite de la forme $y = mx + p$ ou $x = x_0$, (iv) une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$. Seule l'équation réduite est unique.

Application directe Pour chacune des droites suivantes, donner un exemple de chacune des trois autres caractérisations possibles.

\mathcal{D}_1 : droite passant par $A(1, 1)$ et $B(-3, 2)$.

un point et un vecteur directeur Le point A et le vecteur $\overrightarrow{AB}(-4, 1)$ conviennent.

équation cartésienne Un point $M(x, y)$ appartient à \mathcal{D}_1 si $\overrightarrow{AM}(x-1, y-1)$ et \overrightarrow{AB} sont colinéaires, c'est-à-dire si $(x-1) \times 1 - (y-1) \times -4 = 0$. Après développement, on trouve comme équation : $x + 4y - 5 = 0$.

équation réduite En isolant y dans l'équation précédente, on trouve $y = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$.

\mathcal{D}_2 : droite passant par $C(2, 3)$, de vecteur directeur $\vec{u}(4, 2)$.

deux points Les points C et $D(6, 5)$ (image de C par la translation de vecteur \vec{u}) conviennent.

équation cartésienne Même méthode que précédemment : il suffit que $\overrightarrow{CM}(x-2, y-3)$ et \vec{u} soient colinéaires, c'est-à-dire que $(x-2) \times 2 - (y-3) \times 4 = 0$, ce qui donne $2x - 4y + 8 = 0$ ou, en simplifiant par 2, $x - 2y + 4 = 0$.

équation réduite En isolant y dans l'équation précédente, on trouve $y = \frac{x}{2} + 2$.

\mathcal{D}_3 : droite d'équation $x = 7$.

deux points Les points $E(7, 0)$ et $F(7, 1)$ conviennent.

un point et un vecteur directeur Le point $E(7, 0)$ et le vecteur $\overrightarrow{EF}(0, 1)$ conviennent.

équation cartésienne Il suffit de partir de l'équation réduite $x = 7$ et de faire passer tous les membres du même côté : cela donne $x - 7 = 0$.

\mathcal{D}_4 : droite d'équation $-\frac{1}{2}x + 2 = 0$.

équation réduite Puisqu' y n'apparaît pas dans l'équation cartésienne, il faut isoler x : $x = 4$.

un point et un vecteur directeur L'équation cartésienne peut s'écrire $-\frac{1}{2}x + 0y + 2 = 0$. Un vecteur directeur est donc $\vec{v}(0, -\frac{1}{2})$. Le point $G(4, 0)$ convient.

deux points Les points G et $H(4, -\frac{1}{2})$ (image de G par la translation de vecteur \vec{v}) conviennent.