Méthodologie

Étude des variations d'une fonction

Comment déterminer les variations d'une fonction f définie sur un intervalle I ?

0 Représentation graphique

Tracer la courbe de la fonction sur la calculatrice ou avec un logiciel adapté (Geogebra par exemple), et observer les variations.

Commentaire *C'est une des plus simples, qui fonctionne avec la plupart des fonctions étudiées au lycée. Mais ce n'est pas une preuve mathématique. À utiliser par exemple pour vérifier le résultat donné par les autres méthodes.*

1 Retour à la définition

Par définition, une fonction f est *croissante* sur un intervalle I si pour tous les nombres a et b de I tels que $a<b$, $f(a)\leqslant f(b)$ (et *décroissante* si pour les nombres a et b tels que $a<b$, $f(a)\geqslant f(b)$). Montrer que la fonction étudiée, sur un intervalle donné, vérifie l'une de ces propriétés.

Exemple *Voir la démonstration de la croissance de la fonction racine carrée, dans le cours.*

Commentaire *À connaître, mais vous l'utiliserez rarement en pratique. Par contre, elle pourra être utilisée en conjonction avec d'autres méthodes (voir partie 4).*

2 Fonctions de référence

Vous devez connaître les variations de certaines fonctions de référence. Vous pouvez utiliser leurs variations sans avoir à le démontrer. Vous pouvez utiliser par exemple :

— une fonction affine (de type $x\mapsto ax+b$) est croissante sur $\mathbb{R}$ si le coefficient directeur est positif, décroissante s'il est négatif ;

— la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$;

— la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$;

— pour un polynôme du second degré, voir le cours ;

— etc.

De plus, il est à savoir que la fonction racine conserve le sens de variation, alors que la fonction inverse l'inverse.

Exemple : Variations de la fonction $f:x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ sur $\mathbb{R}$ *La fonction $x\mapsto x^2-2x+2$ est décroissante sur $]-\infty;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$ (c'est un trinôme du second degré). La fonction racine conserve les variations et la fonction inverse l'inverse, donc la fonction f est croissante sur $]-\infty;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.*

Commentaire *Lorsqu'elle est applicable, c'est la méthode la plus rapide pour étudier les variations de ces fonctions. Mais il n'est pas toujours possible de la mettre en pratique.*

3 Dérivée

Si la fonction f est dérivable (ce qui est le cas pour la plupart des fonctions vues au lycée), calculer la dérivée f', et étudier son signe : f est croissante lorsque sa dérivée est positive, et décroissante lorsque sa dérivée est négative.

Commentaire *Cette méthode fontionnera la plupart du temps pour les fonctions étudiées au lycée, mais ça n'est pas toujours la plus pratique. Par exemple, l'étude des variations de la fonction $f:x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ prend deux phrases en utilisant les fonctions de référence, et des calculs longs, techniques et risquant de contenir des erreurs en utilisant les dérivées.*

4 Combinaison des méthodes précédentes

L'ensemble des méthodes précédentes peuvent être combinées.

Exemple *Pour étudier les variations de la fonction $f:x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^4-2x^3+x^2+1}}$, il y a mille manières de faire, mais une méthode simple est de commencer par étudier les variations de $x\mapsto x^4-2x^3+x^2+1$ en utilisant la dérivée pour ensuite appliquer les connaissances sur les fonctions racine et inverse pour en déduire les variations de f.*