# 1 Variations

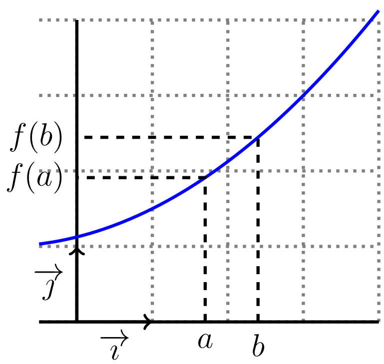
**Définition.** Soit une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ (où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$).

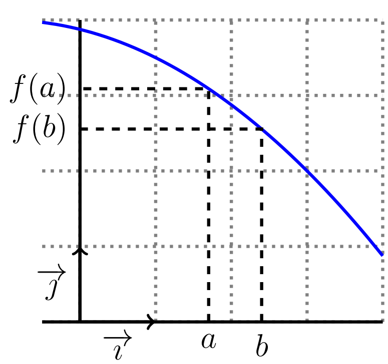
— On dit que $f$ est *croissante* (respectivement *strictement croissante*) si quels que soient $a$ et $b$ dans $\mathcal{D}$, si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ (respectivement $f(a) < f(b)$). On dit aussi que « la fonction $f$ conserve l'ordre ».

— On dit que $f$ est *décroissante* (respectivement *strictement décroissante*) si quels que soient $a$ et $b$ dans $\mathcal{D}$, si $a < b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$ (respectivement $f(a) > f(b)$). On dit aussi que « la fonction $f$ inverse l'ordre ».

— On dit que $f$ est *constante* si quels que soient $a$ et $b$ dans $\mathcal{D}$, alors $f(a) = f(b)$.

— On dit qu'une fonction est *monotone* (respectivement *strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou décroissante).




# 2 Fonctions associées

**Propriété** (Fonctions associées)**.** Soit $u$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_u$ sa courbe représentative.

(a) Étant donné un réel $k$, la courbe de la fontion $u + k$ (c'est-à-dire la fonction $x \mapsto u(x) + k$) est l'image de la courbe $\mathcal{C}_u$ par la translation de vecteur $(0, k)$. De plus, les fonctions $u$ et $u + k$ ont les mêmes variations sur $I$.

(b) Étant donné un réel strictement positif $\lambda$, la courbe de la fonction $\lambda u$ (c'est-à-dire la fonction $x \mapsto \lambda u(x)$) est l'image de $\mathcal{C}_u$ par une « compression ou un étirement vertical ». Si $\lambda$ est négatif, la courbe de $\lambda u$ est l'image de $\mathcal{C}_u$ par une

« compression ou un étirement vertical », suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

De plus :

— si $\lambda$ est positif, les fonctions $u$ et $\lambda u$ ont mêmes variations sur $I$ ;

— si $\lambda$ est négatif, les fonctions $u$ et $\lambda u$ ont des variations opposées sur $I$.

(c) La fonction $u$ étant supposée positive sur $I$, la fonction $\sqrt{u}$ a les mêmes variations que la fonction $u$ sur $I$.

(d) La fonction $u$ ne s'annulant pas sur $I$, la fonction $\frac{1}{u}$ a des variations opposées à celles de $u$ sur $I$.

**Démonstration**. Soit $u$ une fonction croissante sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ (la démonstration est similaire si $u$ est décroissante).

(a) Soit $k$ un réel quelconque, et $a$ et $b$ deux éléments de $I$, tels que $a < b$. Alors :

$$\begin{aligned} a &< b \\ f(a) &\leqslant f(b) \text{ car } f \text{ est croissante} \\ f(a) + k &\leqslant f(b) + k \end{aligned}$$

Donc la fonction $x \mapsto f(x) + k$ est croissante.

(b) Soit $\lambda$ un réel strictement positif, et $a$ et $b$ deux éléments de $I$, tels que $a < b$. Alors :

$$\begin{aligned} a &< b \\ f(a) &\leqslant f(b) \text{ car } f \text{ est croissante} \\ \lambda f(a) &\leqslant \lambda f(b) \text{ car } \lambda \text{ est positif} \end{aligned}$$

Donc la fonction $x \mapsto \lambda f(x)$ est croissante.

De même, si *lambda* est strictement négatif…À vous !

□

**Méthode** (Application, sur un exemple)**.** Quelles sont les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}} + 7$, définie sur $\mathbb{R}$ ?

La fonction $x \mapsto x^2 + 2x + 5$ est un trinôme du second degré, décroissant sur $]-\infty; -1]$, et croissant ensuite. En utilisant les fonctions associées, on obtient :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+2x+5$ | | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | |
| $\sqrt{x^2+2x+5}$ | | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ | | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}+7$ | | $\nearrow$ | $\frac{15}{2}$ | $\searrow$ | |

# 3 Position relative

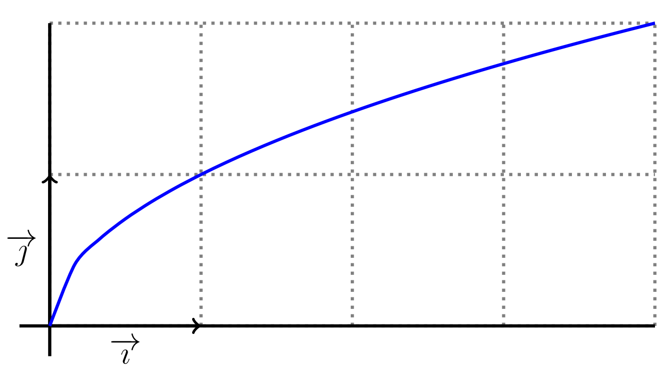
**Propriété.** Étant donnés deux fonctions $f$ et $g$, et leurs courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectives, « $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $I$ » est équivalent à « pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ ».

# 4 Racine carrée

**Définition.**

— Étant donné un nombre réel positif $a$, sa racine carrée $\sqrt{a}$ désigne l'unique nombre positif dont le carré est $a$.

— La fonction racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ qui a chaque réel positif $x$ associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.




**Propriété.** La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

**Démonstration**. Soient $a$ et $b$ deux nombres de $\mathbb{R}^+$, avec $a < b$. On a :

$$\begin{aligned}
a &< b \\
a - b &< 0 \\
\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 &< 0 \text{ car } a \text{ et } b \text{ sont positifs} \\
\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) &< 0 \\
\sqrt{a} - \sqrt{b} &< \frac{0}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \text{ car } \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ est strictement positif} \\
\sqrt{a} - \sqrt{b} &< 0 \\
\sqrt{a} &< \sqrt{b}
\end{aligned}$$

Nous avons montré que si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ : donc la fonction racine est strictement croissante.

□

**Propriété** (Positions relatives)**.** Soient $\mathcal{C}_x$, $\mathcal{C}_{x^2}$, $\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$, les courbes respectives des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$ définies sur $\mathbb{R}^+$. Alors :

— si $x \in [0;1]$, alors $\mathcal{C}_{x^2}$ est en dessous de $\mathcal{C}_x$, elle même en dessous de $\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$ ;

— si $x \in [1;+\infty]$, alors $\mathcal{C}_{x^2}$ est au dessus de $\mathcal{C}_x$, elle même au dessus de $\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$.

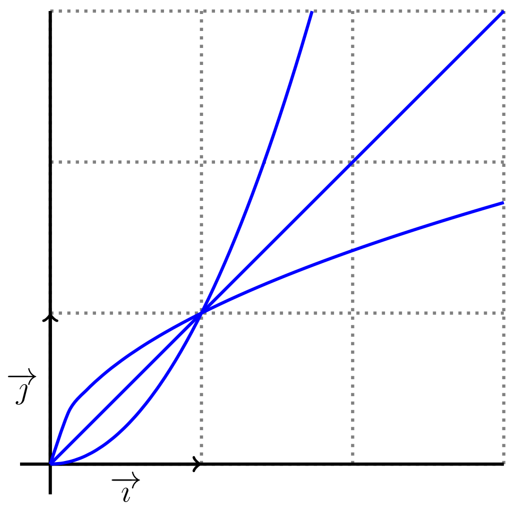
**Démonstration**.[TODO : À détailler]

— Premier cas : en 0 et 1, les courbes sont confondues, donc tout va bien.

— Second cas : soit $0 < x < 1$. Alors $\sqrt{0} < \sqrt{x} < \sqrt{1}$ (car $\sqrt{.}$ est croissante), et $0 < \sqrt{x} < 1$. En multipliant par $\sqrt{x} > 0$, on a $0 < x < \sqrt{x}$. En élevant au carré (cette fonction étant croissante sur les positifs), on a $0 < x^2 < x$. CQFD.

— Troisième cas : soit $x > 1$. Idem.

□




# 5 Valeur absolue

**Définition.** La *valeur absolue* d'un nombre réel $x$, noté, $|x|$, est égale à

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

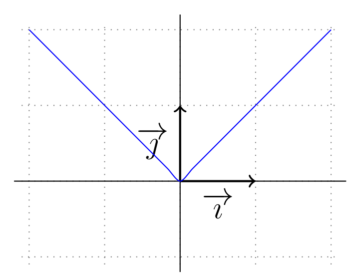
**Propriété.** Quels que soient $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$, on a :

- $|x| \geqslant 0$ ;
- $|x| = |-x|$ ;
- $|xy| = |x|\,|y|$ ;
- si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

**Définition.** La *fonction valeur absolue* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui a tout $x$ associe sa valeur absolue $|x|$.

**Propriété.** Les variations de la fonction valeur absolue sont :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert x\rvert$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |




**Propriété** (Équations)**.** Quels que soient $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$, on a :

- $|x| = 0$ ssi $x = 0$ ;
- $|x| = y$ ssi $\begin{cases} x = y & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x = y & \text{si } x < 0 \end{cases}$ ;
- $|x| = |y|$ ssi $x = y$ ou $x = -y$ ;
- $|x + y| \neq |x| + |y|$ en général.

**Propriété** (Équations)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| = a$ (où $a \in \mathbb{R}$). Alors :

- si $a < 0$, l'équation n'a pas de solutions ;
- si $a = 0$, $x = 0$ ;
- si $a > 0$, $x = a$ ou $x = -a$.