Généralités sur les fonctions

Corrigé de certains exercices de la feuille de compétences

50.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

51. *Corrigé dans le manuel.*

52.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	

53.

x	4		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	

54.

x	4		∞
f		$\searrow$	

55.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

56.

x	$-\infty$		5
f		$\searrow$	0

57.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\|$	$\nearrow$	

58. *Fait en classe.*

67. *Remarque : Pour les exercices de position relative de courbes, voir plutôt les exercices faits en cours.*

1. La droite du haut est la courbe de la fonction $x \mapsto x+1$, celle du bas est celle de $x \mapsto x$, et la courbe du milieu est celle de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.
2. $x \leqslant \sqrt{x^2+1} \leqslant x+1$
3. *Corrigé dans le manuel. C'est plus difficile que ce que je demanderai en devoir.*

75. (1) Courbe verte : f ; Courbe rouge : g. On a : $AB = \sqrt{x} - x$.

(2)

x	0		$\approx 0,25$		1
f		$\nearrow$		$\searrow$	

(3) *Difficile pour une question de devoir.* On a $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{x}\right)^2 \geqslant 0$ donc ... on développe, et on obtient $\sqrt{x} - x \leqslant \frac{1}{4}$. On calcule que $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

(4) Puisque $g(x) \leqslant \frac{1}{4}$, alors le maximum de g est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$. De plus, puisque $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$, alors le maximum de g est atteint en $\frac{1}{4}$, et vaut $\frac{1}{4}$. Donc la longueur maximale du segment $[AB]$ est $\frac{1}{4}$, atteinte pour $x = \frac{1}{4}$.

78. *C'est un bon exemple de problème qui peut tomber en devoir.*

1. a) $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.

   b) Puisque $y = x - 4$, alors $AM = \sqrt{x^2 + (x-4-1)^2} = \cdots = \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$.

2. a) On étudie le signe du trinôme $x \mapsto 2x^2 - 10x + 25$; il est toujours positif, donc on ne prend jamais la racine d'un nombre négatif : la fonction f est toujours définie.

   b)

x	$-\infty$		$2,5$		$+\infty$
u		$\searrow$	12,5	$\nearrow$	

   c) Les variations de $\sqrt{u}$ sont les mêmes que celles de u.

   d) Les variations de f sont donc les mêmes que celles de u :

x	$-\infty$		$2,5$		$+\infty$
f		$\searrow$	$\sqrt{12,5}$	$\nearrow$	

   Donc la valeur minimale de AM est $\sqrt{12,5}$.

93. 1. a) *Vous serez guidés sur une question comme celle-ci.* On compare $1 + x$ et $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$, c'est-à-dire que l'on résout l'inéquation $1 + x \geqslant \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$, en utilisant le signe d'un trinôme second degré. On trouve que pour tout $x \geqslant -1$, $1 + x \leqslant \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$. Donc, puisque la racine carrée est strictement croissante, $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$.

b) On résout l'équation, et on obtient $x = 0$.

2. (a) *Faites-cela à la calculatrice.*

(b) Puisque $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de la droite d, sauf en $x = 0$ où elles sont confondues.

Bon courage !