Suites

Exercice 1 (D'après l'exercice 4 du bac de juin 2015, Antilles-Guyane)**.**
On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5u+0,5(k-1)-1,5$
	Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p=2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

Exercice 2 (D'après l'exercice 4 du bac de novembre 2015, Amérique du sud)**.** On considère une suite u définie par $u_0=90$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1}=0,85u_n+6$.
On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geqslant 120-u$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0,85\times u+6$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

1. Que fait cet algorithme ?
2. Quelle valeur affiche-t-il ?

Exercice 3 (D'après l'exercice 2 du bac de mai 2015, Liban)**.** On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} - u_n$.

1. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ...
	|Affecter à u la valeur ...
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

2. À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8

n	5	10	50	100
u_n	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

Exercice 4 (D'après l'exercice 3 du bac de juin 2015, centres étrangers)**.** Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3^{2u_n} - 3^{u_n}.$$

Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que ... ... Fin tant que
Sortie	Afficher n

1. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

Exercice 5 (D'après l'exercice 4 du bac de novembre 2015, Nouvelle-Calédonie)**.** On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$:

$$\begin{cases} d_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}d_n + \dfrac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1. Calculer d_1 et a_1.
2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.

   L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels
	D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300
	A prend la valeur 450
	Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	$\quad$ D prend la valeur $\dfrac{D}{2} + 100$
	$\quad$ A prend la valeur $\dfrac{A}{2} + \dfrac{D}{2} + 70$
	Fin pour
Sortie :	Afficher D
	Afficher A

(a) Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$? Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1** ?

(b) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

Exercice 6 (D'après l'exercice 2 du bac de juin 2015, Amérique du Nord)**.** On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ de la façon suivante : $\left\{\begin{array}{rcr} x_0 & = & -3 \\ y_0 & = & 4 \end{array}\right.$ et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} & = & 0,6x_n + 0,8y_n \end{array}\right.$$

1. (a) Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.

   (b) Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur -3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
    Construire le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$
    t prend la valeur x
    x prend la valeur ....
    y prend la valeur ....
Fin Pour

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.