Activité
Suites géométriques

Les trois parties sont indépendantes. Vous pouvez travailler à plusieurs, et vous aider du livre, pages 140 et suivantes.

Définition. Une suite v est dite *géométrique* s'il existe un réel q non nul, appelé raison, tel que pour tout n de son domaine de définition on ait : $v_{n+1} = qv_n$.

1 Terme d'une suite

Exercice 1 (Termes d'une suite)**.**

1. Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2. Calculer les cinq premiers termes de la suite.
2. Soit v la suite définie pour $n \geqslant 3$ par $v_3 = 9$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{3}$. Calculer les cinq premiers termes de la suite.

Exercice 2 (Terme général)**.** On reprend les suites u et v définies à l'exercice 1.

1. Calculer u_{10} ; calculer u_{50}. Conjecturer le terme général de u (c'est-à-dire la formule permettant de calculer directement u_n pour n'importe quelle valeur de n).
2. Calculer v_{10} ; calucelr v_{50}. Conjecturer le terme général de v (c'est-à-dire la formule permettant de calculer directement v_n pour n'importe quelle valeur de n).

2 Variations

Exercice 3 (Variations d'une suite)**.**

1. On considère la suite géométrique v de premier terme 1 et de raison q (où $q \in \mathbb{R}$). Pour chacune des valeurs de q suivantes, calculer quelques uns des premiers termes de la suite v, puis conjecturer ses variations (est-elle (strictement) croissante ? (strictement) décroissante ? ni croissante ni décroissante ? constante ?).
   (a) $q = 2$: Les premiers termes sont 2, 4, 8, 16… La suite semble croissante.
   (b) $q = -3$: Les premiers termes sont -3, 9, … La suite semble ….
   (c) $q = -5$ (d) $q = \frac{1}{2}$ (e) $q = 0,1$ (f) $q = -0,1$ (g) $q = 5$ (h) $q = 1$
2. En vous aidant des conjectures de la question précédente, compléter dans le cours la propriété sur les variations.

3 Somme de termes

Propriété. Soit q un nombre réel différent de 1, et n un nombre entier positif. Alors

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration. Soit q un nombre réel différent de 1, et n un nombre entier positif. On appelle S la somme $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.

$$S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

On multiplie les deux côtés de l'égalité par q.

$$\begin{align}
q \times S &= q \times \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n\right) \tag{1}\\
qS &= q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1} \tag{2}\\
qS &= \underbrace{1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n}_{S} + q^{n+1} - 1 \tag{3}\\
qS &= S + q^{n+1} - 1 \tag{4}\\
qS - S &= q^{n+1} - 1 \tag{5}\\
(q-1)S &= q^{n+1} - 1 \tag{6}\\
S &= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \tag{7}\\
S &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \tag{8}
\end{align}$$

$\square$

Exercice 4 (Application)**.** 1. Calculer $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^7$.

2. Calculer $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^10}$.
3. On place 1 grain de riz sur le premier carreau d'un échiquier, 2 sur le second carreau, 4 sur le troisième, 8 sur le quatrième, et ainsi de suite. Combien de grains seront placés sur la 64ᵉ case ? Combien de grains de riz seront posés en tout sur le plateau.

Exercice 5 (Preuve)**.** Lire et comprendre la démonstration précédente. En particulier :

1. Justifier le passage des lignes 6 à 7 : pour quelle raison peut-on diviser par $q - 1$?
2. Justifier le passage des lignes 7 à 8.