Définition. Un *trinôme du second degré* est une fonction f de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels, et $a \neq 0$.

1 Formes d'un trinôme

Description (Utilité des différentes formes)**.**

Forme factorisée : $a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$ avec $a \neq 0$, et éventuellement $x_1 = x_2$.

- Met en valeur les racines.
- Cette forme n'existe pas toujours.

Forme canonique : $a\left(x - \alpha\right)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.

- Met en valeur l'extremum et l'abscisse à laquelle il est atteint.
- Existe toujours.

Forme développée : $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

- Forme « par défaut ».
- Utile pour calculer des images.

Remarque. Dans toute la suite, on considèrera un trinôme $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels, et $a \neq 0$.

Activité. TODO Passage de la forme développée à la forme canonique.

Propriété (De la forme développée à la forme canonique)**.** Tout trinôme ax^2+bx+c peut être mis sous la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

2 Racines

Définition. Étant donné un trinôme $ax^2 + bx + c$, on appelle *discriminant* de ce trinôme le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Définition. On appelle *racines* d'un trinôme $ax^2 + bx + c$ les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Propriété. Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Trois cas seulement sont possibles :

- si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;

— si $\Delta = 0$, le trinôme a une unique racine (dite *racine double*) $x_1 = \frac{-b}{2a}$;
— si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racines.

Propriété (De la forme canonique à la forme factorisée)**.** Un trinôme $ax^2 + bx + c$ peut être mis sous la forme :

- $a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta > 0$, et alors $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- $a(x - x_1)^2$ si $\Delta = 0$, et alors $x_1 = \frac{-b}{2a}$;
- ne peut pas être factorisé si $\Delta < 0$.

3 Signe

Propriété. Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$, et Δ son discriminant.

— si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a à l'extérieure des racines, et du signe de $-a$ à l'intérieur ;
— si $\Delta = 0$, le trinôme est du signe de a, strictement sauf en l'unique racine où il est nul ;
— si $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a, strictement.

4 Variations

Propriété. Soit une fonction trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

- si $a > 0$, P est décroissante sur $]-\infty; \frac{-b}{2a}]$, et croissante sur $[\frac{-b}{2a}; +\infty[$;
- si $a < 0$, P est croissante sur $]-\infty; \frac{-b}{2a}]$, et décroissante sur $[\frac{-b}{2a}; +\infty[$.

5 Bilan et Interprétation géométrique

TODO : Fiche de synthèse