*Les données de cette activité sont issues de* Devenez sorciers, devenez savants *(pages 105 à 107), d'Henri Broch et Georges Charpak, éditions Odile Jacob, 2002.*

Imaginons un individu se revendiquant astrologue, et faisant des prévisions pour les années à venir. En particulier, pour les années 1994, 1995 et 1996 (cette dernière année étant bissextile), il avait annoncé 169 jours sismiques dans le monde. Selon le *National Earthquake Information Service* (États-Unis), au cours de cette période, sur le même territoire, il y a eu 196 jours de séisme (en ne considérant que ceux dont la magnitude est supérieure ou égale à 6,5), dont 33 coïncident avec les prédictions de notre voyant. Nous allons étudier cette prédiction sous l'angle des probabilités.

L'hypothèse que nous allons étudier au cours de cette activité est : « Les prédictions de l'astrologue sont-elles le fruit du hasard ?»

# 1 Expérience élémentaire

On choisit une date au hasard parmi les trois années considérées (les dates étant équiprobables). Quelle est la probabilité d'obtenir une date de séisme ?

# 2 Répétition d'expériences

Dans toute la suite, on appelle « succès » (noté **S**) le fait d'obtenir une date de séisme, et « échec » (noté **E**) le faut d'obtenir une date sans séisme. On note, par exemple **SSE** l'évènement « obtenir deux succès puis un échec ».

## 2.1 Trois répétitions

On répète l'expérience précédente trois fois de suite (c'est-à-dire : on choisit au hasard, trois dates).

1. *Évènements élémentaires*

   (a) Dessiner l'arbre représentant cette nouvelle expérience.

(b) Calculer $P(SSE)$, $P(SES)$, $P(ESS)$. Quelle est la probabilité d'obtenir deux succès ?

(c) Calculer $P(SSS)$. Quelle est la probabilité d'obtenir trois succès ?

2. On appelle $X$ la variable aléatoire correspondant au nombre de succès sur les trois répétitions.
   (a) Dresser la loi de probabilités de $X$.
   (b) Calculer l'espérance de $X$, et interpréter ce résultat.

## 2.2 Quatre répétitions

On répète maintenant l'expérience initiale quatre fois, et on note $Y$ le nombre de succès.

1. Calculer $P(Y = 0)$ et $P(Y = 4)$.
2. Dessiner l'arbre correspondant à cette expérience.
3. *Évènement « Y=2 »*
   (a) Donner une issue correspondant à cet évènement, et calculer sa probabilité.
   (b) Faire de même pour un autre exemple. Que constatez-vous ?
   (c) Quelle donnée manque-t-il pour calculer $P(Y = 2)$ ?
   (d) Calculer $P(Y = 2)$.
4. *Évènement « Y=3 »*
   (a) Donner deux issues différentes correspondant à cet évènement, et calculer leurs probabilités. Que constatez-vous ?
   (b) Quelle donnée manque-t-il pour calculer $P(Y = 3)$ ?
   (c) Calculer $P(Y = 3)$.

## 2.3 Cent-soixante-neuf répétitions

On répète maintenant cent-soixante-neuf fois l'expérience (correspondant aux 169 prédictions de l'astrologue). Notons que cette répétition est faite avec remise : on peut tomber plusieurs fois sur la même date. On appelle $Z$ la variable aléatoire représentant le nombre de succès.

L'arbre correspondant à cette expérience contient des milliars de milliards de branches (environ $10^{51}$) ; nous allons nous en passer.

1. Quelles valeurs peut prendre $Z$ ?
2. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 169)$.
3. *Évènement « Z=33 »*
   (a) Donner un exemple d'issue correspondant à cet évènement, et calculer sa probabilité.
   (b) En utilisant les questions précédente, quelle information nous manque-t-il pour calculer $P(Z = 33)$ ?
   (c) On appelle *coefficient binomial de 33 et 169*, noté $\binom{169}{33}$, le nombre de branches de l'arbre à 33 succès. On donne : $\binom{169}{33} \approx 1,3436 \times 10^{35}$.
4. À titre de comparaison, en utilisant le même genre de raisonnement, calculer la probabilité, sur cent lancers d'une pièce de monnaie équilibrée, d'obtenir exactement cinquante fois pile et cinquante fois face.
5. À ce stade, peut-on confirmer ou infirmer que le prétendu astrologue a fait preuve de ses pouvoirs ?

# 3 Coefficients binomiaux

## 3.1 Définition

**Définition** (Coefficient binomial)**.** Soient $k$ et $n$ deux entiers naturels, tels que $k \leqslant n$. On considère l'arbre représentant un schéma de Bernoulli de coefficients $n$ et $p$ (pour un certain $p$ réel de $[0, 1]$).

On appelle *coefficient binomial* de $k$ et $n$, noté $\binom{n}{k}$ (anciennement $C_n^k$), le nombre de chemins de cet arbre réalisant $k$ succès.

**Propriété** (Dénombrement)**.** Le nombre de combinaisons de $k$ éléments parmi $n$ est égal à $\binom{n}{k}$.

Pour cette raison, $\binom{n}{k}$ est parfois prononcé *« $k$ parmi $n$ »*.

**Exemple.**

— Le nombre de couples de couleurs différentes parmi un choix de six couleurs est ............................................

— Le tirage du loto est un tirage de sept numéros parmi quarante. Le nombre de tirages possibles est ..............................

## 3.2 Propriétés

### 3.2.1 Travail préliminaire

Réaliser, sur une feuille de brouillon, *proprement*, les arbres correspondant à deux schéma de Bernoulli de paramètres respectifs $n = 3$ et $p$ d'une part, et $n = 4$ et $p$ d'autre part.

### 3.2.2 Valeurs « remarquables »

*Pour chacune des questions suivantes, essayer d'abord avec des valeurs de $n$ particulières (par exemple $n = 2$, $n = 3$), puis en déduire une généralisation avec un $n$ quelconque.*

Soit un schéma de Bernoulli de coefficients $n$ et $p$ (pour un entier strictement positif $n$, et un réel $p$ de $[0; 1]$).

1. Donner toutes les issues possibles à 0 succès. En déduire $\binom{n}{0}$.
2. Donner toutes les issues possibles à 1 succès. En déduire $\binom{n}{1}$.
3. Donner toutes les issues possibles à $n$ succès. En déduire $\binom{n}{n}$.

### 3.2.3 Coefficients « symétriques »

1. Soit un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p \in [0; 1]$.
   (a) Lister tous les évènements possibles à 1 succès, puis tous les évènements possibles à $3 - 1$ succès. Apparier les éléments des deux listes.
   (b) En déduire une relation entre $\binom{3}{1}$ et $\binom{3}{2}$.
2. Mêmes questions avec $n = 4$, et les évènements à 3 succès d'une part, puis les évènements à $4 - 3$ succès d'autre part.
3. En déduire une relation entre $\binom{n}{p}$ et $\binom{n}{n-p}$ (pour un entier $p$ de $[0; n]$).

### 3.2.4 Calcul pratique de coefficients binomiaux

1. On s'intéresse à l'arbre correspondant à un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p$ quelconque.
   (a) Masquer les branches les plus à droite de l'arbre. La partie visible correspond à un arbre d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$, pour le même $p$.
   (b) Marquer en rouge les chemins à un succès. En déduire $\binom{2}{1}$.
   (c) Marquer en vert les chemins à zéro succès. En déduire $\binom{2}{0}$.
   (d) Révéler la partie droite de l'arbre, compter les branches à deux succès, et en déduire $\binom{3}{1}$.
   (e) En déduire une relation entre $\binom{3}{1}$, $\binom{2}{1}$ et $\binom{2}{0}$.
2. On s'intéresse à l'abre correspondant à un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$, et $p$ quelconque.
   (a) Masquer les branches les plus à droite de l'arbre.
   (b) Marquer en rouge les chemins à trois succès. En déduire $\binom{3}{3}$.
   (c) Marquer en rouge les chemins à deux succès. En déduire $\binom{3}{2}$.
   (d) Révéler la partie droite de l'arbre, compter les branches à trois succès, et en déduire $\binom{4}{3}$.
   (e) En déduire une relation entre $\binom{4}{3}$, $\binom{3}{3}$ et $\binom{3}{2}$.

3. *Généralisation :* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p$ un entier dans $[0; n]$. Exprimer $\binom{n+1}{p}$ en fonction de $\binom{n}{?}$ et $\binom{n}{?}$ (en remplaçant les ? par les bonnes valeurs).

## 3.3 Triangle de Pascal

## 3.4 Bilan

**Propriété.** Soient $k$ et $n$ deux entiers naturels, tels que $k \leqslant n$. Alors

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \dots$

(ii) $\binom{n}{1} = \dots$

(iii) $\binom{n}{n-k} = \dots$

(iv) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \dots$

# 4 Échantillonnage

## 4.1 Loi binomiale

1. Dans un tableur, écrire dans les cellules $A1$ à $C1$ les textes : `k`, `P(X=k)` et `P(X<=k)`. Entrer les entiers de 0 à 169 dans les cellules $A2$ à $A171$.
2. Dans la cellule $B2$, écrire la formule calculant $P(X=0)$ (en faisant référence à $A2$) ; recopier cette formule de $B2$ à $B171$.
3. Lire et interpréter la valeur affichée en $B35$.
4. Dans la cellule $C2$, écrire la formule calculant $P(X \leqslant 0)$ (en faisant référence à $A2$) ; recopier cette formule de $C2$ à $C171$.
5. Lire et interpréter la valeur affichée en $C35$.

## 4.2 Échantillonnage

1. Quel sont le plus petit entier $a$ tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$, et le plus petit entier $b$ tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$ ? Justifier que $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0,95$.
2. On considère la variable aléatoire $\frac{X}{n}$, qui comptabilise la *fréquence* de succès du schéma de Bernoulli. Justifier que $P\left(\frac{a}{n} \leqslant \frac{X}{n} \leqslant \frac{b}{n}\right) \geqslant 0,95$. À quoi correspond l'intervalle $J = \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ ?
3. Calculer la fréquence de prédictions correctes de l'astrologue. Cette fréquence appartient-elle à $J$ ? Que peut-on conclure ?