1 Étude préliminaire

1. C'est une expérience aléatoire à deux issues (succès et échec) : c'est une épreuve de Bernoulli. La probabilité de succès (de tomber sur un jour de séisme) est $\frac{196}{365+365+366} = \frac{196}{1096}$ (car il y a équiprobabilité).
2. C'est la répétiton de 169 épreuves de Bernoulli : c'est un schéma de Bernoulli. La variable X, qui compte le nombre de succès, suit donc une loi binomiale de paramètres 169 et $\frac{196}{1096}$.
3. On sait que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}$ (où n est le nombre d'épreuves, soit 169, et k le nombre succès). Donc
$$P(X = 33) = \binom{169}{33} \times \left(\frac{196}{1096}\right)^{33} \times \left(1 - \frac{196}{1096}\right)^{169-33} \approx 6,63\,\%.$$
4. Soit Y la variable aléatoire correspondant à cette épreuve : elle suit une loi binomiale de paramètres 100 et $^1/_2$, donc
$$P(Y = 50) = \binom{100}{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{100-50} \approx 7,96\ \%.$$

   À première vue, obtenir autant de prévisions correctes que notre voyant est peu probable ($6,63$ %). Mais c'est une probabilité du même ordre que celle d'obtenir 50 fois pile sur 100 lancers d'une pièce de monnaie équilibrée, ce qui n'est pourtant pas un évènement extraordinaire.

   Ces premiers calculs sont donc insuffisants pour porter un jugement sur les capacités de voyance de notre astrologue.

2 Loi binomiale

Questions 1, 2 et 4 : Voir tableur.

3. On lit environ 0,0663, soit 6,63 %. Cela correspond à la probabilité d'obtenir exactement 33 succès en choisissant 169 dates au hasard dans l'expérience étudiée en partie précédente.
5. On lit environ 0,749, soit 74,9 %. Cela correspond à la probabilité d'obtenir 33 succès ou moins dans l'expérience étudiée.

3 Échantillonnage

1. On lit sur le tableur que $a = 21$ et $b = 40$.

   Puisque a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$, alors $P(X < a) \leq 0,025$.

   $$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a \leq X \cap X \leq b) \\ &= P(a \leq X) + P(X \leq b) - P(a \leq X \cup X \leq b) \end{aligned}$$

   Or $P(a \leq X) = 1 - P(X < a)$ et $P(a \leq X \cup X \leq b) = 1$, donc :

   $$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= 1 - P(X < a) + P(X \leq b) - 1 \\ &= P(X \leq b) - P(X < a) \\ &> 0,975 - 0,025 \\ &> 0,95 \end{aligned}$$

2. $P(\frac{a}{169} \leq \frac{X}{169} \leq \frac{b}{169}) = P(a \leq X \leq b)$, donc $P(\frac{a}{169} \leq \frac{X}{169} \leq \frac{b}{169}) > 0,95$. L'intervalle J est donc un intervalle de fluctuation de X au seuil de 95 % : cela signifie que $\frac{X}{169}$ a une probabilité de 95 % d'être dans l'intervalle J.
3. D'une part, $J = \left[\frac{a}{169}; \frac{b}{169}\right] \approx [0,124; 0,237]$. D'autre part, $f = \frac{33}{169} \approx 0,195$. Donc f est dans l'intervalle J : on ne peut pas affirmer que ces prédictions ne sont pas dues au hasard.

   En d'autres termes : le voyant n'a pas mis en évidence l'efficacité de sa méthode de prédiction.