

**Exercice 1** (6 points). *Les trois questions sont indépendantes.*

1. En remarquant que  $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ , déterminer la valeur exacte de  $\sin \frac{5\pi}{12}$ .
2. Simplifier au maximum l'expression suivante :

$$\cos(3x) \cos(2x) + \sin(2x) \sin(3x)$$

3. On considère un nombre  $x$  tel que  $\sin x = \frac{1}{3}$ .
  - (a) Calculer  $\cos 2x$ .
  - (b) Quelles sont les valeurs possibles de  $\cos x$  ?

**Exercice 2** (7 points). On définit la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 10$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+1}$ .

1. Calculer  $u_0, u_1, u_2, u_3$  (arrondir les résultats au centième).
2. Conjecturer les variations de la suite.

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient :

$u_{n+1} - u_n =$
$\frac{-u_n^2 + u_n + 1}{u_n^2 + u_n}$

3. Dresser le tableau de signes du trinôme  $-x^2 + x + 1$ , puis de la fraction  $\frac{-x^2+x+1}{x^2+x}$  (définie sur  $\mathbb{R}^+$ ).
4. On admet que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . *Sans nouveau calcul*, déduire des questions précédentes le signe de  $u_{n+1} - u_n$ , puis les variations de la suite  $u$ .

**Exercice 3** (7 points). *Les deux questions sont indépendantes.*

On considère la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 27$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{n+1} = 0,2 \times u_n + 0,7$ .

1. L'objet cette question est de déterminer une formule explicite pour  $u$ .  
On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = u_n - 0,875$ .
  - (a) Montrer que  $v$  est une suite géométrique de premier terme  $v_0 = 26,125$  et de raison  $0,2$ .
  - (b) En déduire le terme général de  $v$ , puis que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = 27 \times 0,2^n + 0,875$ .
  - (c) Combien vaut  $u_{100}$  (arrondir au millième) ?
2. On admet que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ . En utilisant le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ , ou la différence  $u_{n+1} - u_n$ , ou toute autre méthode de votre choix, déterminer les variations de la suite  $u$ .

---

**Propriété.** Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$