

Exercice 1 (6 points).

1. En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$, déterminer la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{12}$.

$$\begin{aligned}\cos \frac{5\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2} (\sqrt{3} - 1)}{4}\end{aligned}$$

2. Simplifier au maximum l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\sin(3x) \cos(2x) - \sin(2x) \cos(3x) \\ \sin(3x) \cos(2x) - \sin(2x) \cos(3x) &= \sin(3x - 2x) \\ &= \sin x\end{aligned}$$

3. (a) En remarquant que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, montrer que :

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

On a :

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1 + \cos \left(2 \frac{\pi}{8} \right)}{2} \\ &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\ &= \frac{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(b) En justifiant pourquoi $\cos \frac{\pi}{8} > 0$, en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$. Puisque $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, alors $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ ou $\cos \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$.

Mais $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\cos \frac{\pi}{8} > 0$, et donc $\boxed{\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}}$.

Exercice 2 (7 points). On définit la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 (arrondir les résultats au centième).

$$u_0 = \frac{0^2}{2^0} = 0$$

$$u_1 = \frac{1^2}{2^1} = 0,5$$

$$u_2 = \frac{2^2}{2^2} = 1$$

$$u_3 = \frac{3^2}{2^3} \approx 1,125$$

2. Conjecturer les variations de la suite. Sur les quatre premières valeurs, la suite est croissante. On conjecture que la suite est croissante sur \mathbb{N} .

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient :

$u_{n+1} - u_n =$
$\frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}}$

3. Dresser le tableau de signes du trinôme $-x^2 + 2x + 1$.

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8$. Puisqu'il est positif, il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{\Delta}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 - \sqrt{8}}{-2} = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{\Delta}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 + \sqrt{8}}{-2} = 1 - \sqrt{2} \approx -1,41$$

Le tableau de signes est donc le suivant.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
$-x^2 + 2x + 1$	-	0	+	0	-

4. Sans nouveau calcul, en déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$, puis les variations de la suite u . Puisque le trinôme $-x^2 + 2x + 1$ est négatif à partir de $x \geq 1 + \sqrt{2}$, alors le nombre $-n^2 + 2n + 1$ est négatif à partir de $n \geq 3$.

D'autre part, 2^{n+1} est toujours positif, donc le rapport $\frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}}$ est négatif à partir de $n = 3$.

Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}}$ est négatif à partir de $n = 3$, donc la suite u est décroissante à partir de $n = 3$.

Exercice 3 (7 points). *Les deux questions sont indépendantes.*

On considère la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 0, 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 1,05 \times u_n + 4$.

1. L'objet cette question est de déterminer une formule explicite pour u .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n + 80$.

- (a) Montrer que v est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 80, 1$ et de raison $1,05$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} + 80 \\
 &= 1,05 \times u_n + 4 + 80 \\
 &= 1,05 \times u_n + 84 \\
 &= 1,05 \times \left(u_n + \frac{84}{1,05} \right) \\
 &= 1,05 \times (u_n + 80) \\
 &= 1,05 \times v_n
 \end{aligned}$$

Donc la suite v est géométrique, de raison $1,05$. Son premier terme est $v_0 = u_0 + 80 = 0, 1 + 80 = 80, 1$.

- (b) En déduire le terme général de v , puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 80, 1 \times 1,05^n - 80$.

Puisque v est une suite géométrique, son terme général est $v_n = 80, 1 \times 1,05^n$.

D'autre part, puisque $v_n = u_n + 80$, alors $u_n = v_n - 80 = 80, 1 \times 1,05^n - 80$.

(c) Combien vaut u_{100} (arrondir à l'unité) ?

En utilisant le terme général calculé précédemment, on obtient :

$$u_{100} = 80,1 \times 1,05^{100} - 80 \approx 10453$$

2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En utilisant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ou la différence $u_{n+1} - u_n$, ou toute autre méthode de votre choix, déterminer les variations de la suite u .

Méthode 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1,05 \times u_n + 4}{u_n} \\ &= \frac{1,05 \times u_n}{u_n} + \frac{4}{u_n} \\ &= 1,05 + \frac{4}{u_n}\end{aligned}$$

Or, puisque $u_n > 0$, alors $\frac{4}{u_n} > 0$, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,05 + \frac{4}{u_n} > 1$. Donc la suite est strictement croissante.

Méthode 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 1,05 \times u_n + 4 - u_n \\ &= 0,05 \times u_n + 4\end{aligned}$$

Or puisque $u_n > 0$, alors $0,05 \times u_n > 0$, et $u_{n+1} - u_n = 0,05 \times u_n + 4 > 0$. Donc la suite est strictement croissante.

Méthode 3. Cette méthode utilise la réponse à la question 1a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, puisque v est une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison strictement plus grande que 1, elle est strictement croissante, donc :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &> v_n \\ u_{n+1} + 80 &> u_n + 80 \\ u_{n+1} &> u_n\end{aligned}$$

Donc la suite u est strictement croissante.