Exercice 1 (Dérivation)**.** *Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par* $f : x \mapsto \frac{x+1}{x-3}$. La fonction est de type $\frac{u}{v}$ (avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = x-3$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$), donc sa dérivée est :

$$\frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{1 \times (x-3) - 1 \times (x+1)}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x-1}{(x-3)^2} = -\frac{4}{(x-3)^2}$$

Donc $\boxed{f'(x) = -\frac{4}{(x-3)^2}}$.

Exercice 2 (Distance d'un point à une courbe)**.** *On considère la courbe carrée $f : x \mapsto x^2$, sa courbe $\mathcal{C}$, et le point $A(0,4)$ dans le plan ramené à un repère orthonormé. Le but de l'exercice est de déterminer quel est le point de $\mathcal{C}$ le plus proche de A.*
Soit $M(x;y)$ un point de $\mathcal{C}$.

1. *Montrer que $AM = \sqrt{x^4 - 7x^2 + 16}$.*
   Le point M est sur $\mathcal{C}$, donc ses coordonnées sont $M\binom{x}{x^2}$. Donc :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(x-0)^2 + (x^2-4)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + \left(x^2\right)^2 - 2 \times 4 \times x^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{x^4 - 7x^2 + 16} \end{aligned}$$

On pose $g : x \mapsto x^4 - 7x^2 + 16$.

2. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = 2x\left(2x^2 - 7\right)$.* D'une part, on a $g'(x) = 4 \times x^3 - 7 \times 2x = 4x^3 - 14x$.
   D'autre part :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x(2x^2 - 7) \\ &= 2x \times 2x^2 - 2x \times 7 \\ &= 4x^3 - 14x \end{aligned}$$

   Donc $g'(x) = 2x(2x^2 - 7)$.

3. *Montrer que le tableau de variations de g est le suivant (on ne demande pas de calculer les valeurs des extremums).*
   La fonction $x \mapsto 2x^2 - 7$ est un trinôme du second degré, de racines $-\sqrt{\frac{7}{2}}$ et $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{7}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{7}{2}}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2 - 7$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

4. *En déduire les variations de f.* Puisque la fonction racine conserve les variations, et que $f = \sqrt{g}$, alors les variations de f sont les mêmes que celles de g.
5. *Répondre au problème posé : Pour quelles valeurs de x la distance AM est-elle minimale ?* Les minimums de la fonction f sont donc atteints aux mêmes abscisses que ceux de la fonction g, c'est-à-dire $-\sqrt{\frac{7}{2}}$ et $\sqrt{\frac{7}{2}}$. Donc la distance AM est minimale pour $x = -\sqrt{\frac{7}{2}}$ et $x = \sqrt{\frac{7}{2}}$.

Exercice 3 (Droites et Cercles)**.** *Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}_1$ défini par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 2x - 14y - 175 = 0$, et le cercle $\mathcal{C}_2$, de centre $B(15; 19)$ et de rayon 5.*

1. (a) *Déterminer les coordonnées du centre A de $\mathcal{C}_2$, et son rayon.*
   Factorisons l'équation de $\mathcal{C}_2$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 14y - 175 &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2 \times 7 \times y + 7^2 - 175 - 1 - 7^2 &= 0 \\ (x+1)^2 + (y-7)^2 &= 225 \\ (x - (-1))^2 + (y-7)^2 &= 15^2 \end{aligned}$$

Le cercle a donc pour centre $A(-1;7)$ et pour rayon 15.

(b) *Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}_2$, en justifiant.* Soit $M(x;y)$ un point du plan. Ce point est sur le cercle $\mathcal{C}_2$ si et seulement si $BM=5$, c'est-à-dire si $BM^2=5^2$, c'est-à-dire si :

$$(x-15)^2+(y-19)^2=25$$

2. *Le point $D(11;16)$ est-il un point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$?* Pour que D soit un point d'intersection des deux cercles, il suffit qu'il soit sur chacun des deux cercles, c'est-à-dire que ses coordonnées vérifient les deux équations.

Cercle $\mathcal{C}_1$:

$$\begin{aligned}&x_D^2+y_D^2+2x_D-14y_D-175\\&=11^2+16^2+2\times 11-14\times 16-175\\&=0\end{aligned}$$

Donc $D\in\mathcal{C}_1$.

Cercle $\mathcal{C}_2$:

$$\begin{aligned}&(x_D-15)^2+(y_D-19)^2\\&=(11-15)^2+(16-19)^2\\&=4^2+(-3)^2\\&=25\end{aligned}$$

Donc $D\in\mathcal{C}_2$.

Le point D est donc bien un point d'intersection des deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

3. (a) *Déterminer l'équation de la droite $\mathcal{T}$ passant par D, et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.* Soit $M(x;y)$ un point du plan ; on a donc $\overrightarrow{DM}\binom{x-11}{y-16}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{15-(-1)}{19-7}=\binom{16}{12}$.

Le point M est un point de $\mathcal{T}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{AB}&=0\\16(x-11)+12(y-16)&=0\\16x+12y-368&=0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite $\mathcal{T}$ est donc :

$$\boxed{16x+12y-368=0}$$

(b) ~~*Sans aucun calcul*~~[1], *justifier que cette droite $\mathcal{T}$ est tangente à $\mathcal{C}_2$.*

1. Oups… Erreur d'énoncé : un petit calcul était nécessaire. Désolé…

Commençons par remarquer que le point D est sur la droite (AB) : en effet, si on applique la condition de colinéarité aux vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$, cette condition est vérifiée, donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les trois points sont alignés.

D'autre part, puisque $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à $\mathcal{T}$, alors la droite $\mathcal{T}$ est perpendiculaire à (AB), donc perpendiculaire à $[BD]$ (puisque D est sur la droite (AB)), qui se trouve être un rayon du cercle.

La droite $\mathcal{T}$ passe par le point D de $\mathcal{C}_2$ (par définition), et en ce point, elle est perpendiculaire au rayon $[BD]$ de $\mathcal{C}_2$: c'est donc la tangente à $\mathcal{C}_2$ passant par D.

(c) *Montrer que $\mathcal{T}$ est aussi une tangente à $\mathcal{C}_1$.* Avec le même raisonnement, puisque D est aussi un point de $\mathcal{C}_1$, alors la droite $\mathcal{T}$ passe par D (point de $\mathcal{C}_1$, perpendiculaire au rayon $[AD]$, donc c'est une tangente au cercle $\mathcal{C}_1$.

4. *Quelle est la position relative des droites $\mathcal{T}$ et (AB) : parallèles, perpendiculaires, confondues ?* Cela a été dit précédemment : elles sont perpendiculaires. Voici deux autres manières pour le montrer (en remarquant que $\overrightarrow{AB}\binom{16}{12}$ est un vecteur directeur de (AB)).

Avec un vecteur directeur : Une équation cartésienne de $\mathcal{T}$ étant $16x+12y-368=0$, alors $\overrightarrow{d}\binom{-12}{16}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{T}$. Or, puisque $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{d} = 16 \times (-12) + 12 \times 16 = 0$, alors les vecteurs directeurs directeurs sont orthogonaux, et les droites sont perpendiculaires.

Avec un vecteur normal : Une équation cartésienne de $\mathcal{T}$ étant $16x+12y-368=0$, alors $\overrightarrow{n}\binom{16}{12}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{T}$. Or, puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{n}$ vérifient la condition de colinéarité ($16 \times 12 - 12 \times 16 = 0$), alors les droites $\mathcal{T}$ et (AB) sont deux droites dont un vecteur directeur de l'une est colinéaire avec un vecteur normal de l'autre : elles sont perpendiculaires.