Corrigé | DÉRIVATION | *1^e^S*

DS n^o^ 8 — A | ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Exercice 1 (5 points)**.** *On considère la fonction f définie sur $[-10;-3[\,\cup\,]-3;10]$ par : $f : x \mapsto \frac{3x-2}{x+3}$.*

1. *Montrer que pour tout $x \in [-10;-2[\,\cup\,]-2;10]$, on a : $f'(x) = \frac{11}{(x+3)^2}$.* La fonction est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = 3x-2$ (et $u'(x) = 3$), et $v(x) = x+3$ (donc $v'(x) = 1$). La dérivée est donc $\frac{u'v-v'u}{v^2}$, soit :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(x+3)-1(3x-2)}{(x+3)^2} \\ &= \frac{3x+9-3x+2}{(x+3)^2} \\ &= \frac{11}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

2. *Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[-10;-3[\,\cup\,]-3;10]$.* Le nombre 11 est strictement positif, tout comme $(x+3)^2$ (car c'est un carré, et $x \neq 3$), donc le rapport des deux est strictement positif : $f'(x) > 0$.
3. *En déduire les variations de f sur cet intervalle (arrondir les valeurs des extrémums au dixième).*

x	-10		-3		10
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
f	$^{32}/_{7}$	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	$^{28}/_{13}$

Exercice 2 (7 points)**.** *On considère la fonction définie sur $[-5; 5]$ définie par $f : x \mapsto -x^3 - 1,5x^2 + 18x + 2$.*

1. *Dériver f.*

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \times x^2 - 1,5 \times 2x + 18 \\ &= -3x^2 - 3x + 18 \end{aligned}$$

2. *Montrer que le signe de f' est :*

x	-5		-3		2		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La dérivée f' est un trinôme du second degré. Nous calculons ses racines (discriminant positif, etc.), et nous trouvons -3 et 2, ce qui donne le signe demandé.

3. *En déduire les variations de f.*

x	-5		-3		2		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-0,5	↘		↗	24	↘	
			-38,5				-70,5

4. *Quels sont le maximum et le minimum de f sur $[-5; 5]$?*
Le minimum de f est $-70,5$, atteint en $x = 5$; le maximum est 24, atteint en $x = 2$.

Exercice 3 (2 points)**.** *Déterminer les coordonnées du centre, et le rayon du cercle défini par l'équation :*

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 36 = 0$$

Pour tout couple x, y de nombres réels, on a :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 4y - 36 &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 + x^2 + 4y + 4 - 36 - 9 - 4 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 - 49 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 &= 49 \\ (x-3)^2 + (y-(-2))^2 &= 7^2 \end{aligned}$$

Donc l'équation définit un cercle de centre de coordonnées $(3; -2)$ et de rayon 7.

Exercice 4 (8 points)**.** *Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1,2; -3,6)$, $B(10; 14)$, $C(-4; 12)$.*
L'objet de l'exercice est de déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$, circonscrit au triangle ABC (c'est-à-dire au cercle qui passe par les trois points A, B, C).

1. *Rappel : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire au segment en son milieu.*
   (a) *Déterminer une équation cartésienne de la droite M_1 passant par $I(5,6; 5,2)$ (milieu de $[AB]$) et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(8,8; 17,6)$.*
   Soit $M(x; y)$ un point du plan. Ce point M est sur la droite M_1 si et seulement si $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$, c'est-à-dire (avec $\overrightarrow{IM}\binom{x-5,6}{y-5,2}$) si :

$$\begin{aligned} (x-5,6) \times 8,8 + (y-5,2) \times 17,6 &= 0 \\ 8,8x - 49,28 + 17,6y - 91,52 &= 0 \\ 8,8x + 17,6y - 140,8 &= 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne est donc

$$8,8x + 17,6y - 140,8 = 0$$

(b) *Sans nouveau calcul, justifier que cette droite M_1 est la médiatrice du segment $[AB]$.*

La droite M_1 passe par I milieu de $[AB]$, et elle a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$, donc elle est perpendiculaire à $[AB]$: c'est la miédiatrice de $[AB]$.

On admet que la droite M_2, d'équation cartésienne $7x + y - 34 = 0$, est la médiatrice du segment $[BC]$.

2. (a) *Montrer que $K(4; 6)$ est le point d'intersection des droites M_1 et M_2.*

Vérifions que les coordonnées de K vérifient les deux équations des droites.

M_1 **:** $8,8 \times 4 + 17,6 \times 6 - 140,8 = 0$ donc $K \in M_1$.

M_2 **:** $7 \times 4 + 6 - 34 = 0$ donc $K \in M_2$.

Donc le point K est sur les deux droites.

On admet que K est le centre du cercle $\mathcal{C}$, circonscrit à ABC.

(b) *Montrer que le rayon de de $\mathcal{C}$ est 10.*

Le rayon du cercle $\mathcal{C}$, de centre K et passant par B (puisqu'il est circonscrit à ABC) est :

$$\begin{aligned}
BK &= \sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2} \\
&= \sqrt{(4 - 10)^2 + (6 - 14)^2} \\
&= \sqrt{36 + 64} \\
&= 10
\end{aligned}$$

3. *Sans justifier, en déduire une équation cartésienne du cercle* $\mathcal{C}$*, circonscrit à* ABC*, de centre* $K(4;6)$ *et de rayon 10.* Une équation cartésienne du cercle est :

$$(x-4)^2+(y-6)^2=10^2$$