

**Exercice 1** (5 points). On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-10; -2[ \cup ] - 2; 10]$  par :  $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x+2}$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in [-10; -2[ \cup ] - 2; 10]$ , on a :  $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$ . La fonction est de la forme  $\frac{u}{v}$ , avec  $u(x) = 2x - 1$  (et  $u'(x) = 2$ ), et  $v(x) = x + 2$  (donc  $v'(x) = 1$ ). La dérivée est donc  $\frac{u'v - v'u}{v^2}$ , soit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+2) - 1(2x-1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{5}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

2. Déterminer le signe de  $f'(x)$  sur  $[-10; -2[ \cup ] - 2; 10]$ .  
Le nombre 5 est strictement positif, tout comme  $(x+2)^2$  (car c'est un carré, et  $x \neq -2$ ), donc le rapport des deux est strictement positif :  $f'(x) > 0$ .
3. En déduire les variations de  $f$  sur cet intervalle (arrondir les valeurs des extrémums au dixième).

$x$	-10	-2	10
$f'(x)$	+		+
$f$	$\frac{21}{8}$	$\nearrow$	$\frac{19}{12}$

**Exercice 2** (7 points). On considère la fonction définie sur  $[-5; 5]$  définie par  $f : x \mapsto x^3 + 1,5x^2 - 18x - 2$ .

1. Dériver  $f$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times x^2 + 1,5 \times 2x - 18 \\ &= 3x^2 + 3x - 18 \end{aligned}$$

2. Montrer que le signe de  $f'$  est :

$x$	-5	-3	2	5	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

La dérivée  $f'$  est un trinôme du second degré. Nous calculons ses racines (discriminant positif, etc.), et nous trouvons  $-3$  et  $2$ , ce qui donne le signe demandé.

3. En déduire les variations de  $f$ .

$x$	-5	-3	2	5	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f$	0,5	38,5	-24	70,5	

4. Quels sont le maximum et le minimum de  $f$  sur  $[-5; 5]$  ?

Le minimum de  $f$  est  $-24$ , atteint en  $x = 2$ ; le maximum est  $70,5$ , atteint en  $x = 5$ .

**Exercice 3** (2 points). Déterminer les coordonnées du centre, et le rayon du cercle défini par l'équation :

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 36 = 0$$

Pour tout couple  $x, y$  de nombres réels, on a :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 4x - 6y - 36 &= 0 \\x^2 + 4x + 4 + x^2 - 6y + 9 - 36 - 9 - 4 &= 0 \\(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 49 &= 0 \\(x + 2)^2 + (y - 3)^2 &= 49 \\(x - (-2))^2 + (y - 3)^2 &= 7^2\end{aligned}$$

Donc l'équation définit un cercle de centre de coordonnées  $(-2; 3)$  et de rayon 7.

**Exercice 4** (8 points). Dans un repère orthonormé, on considère les points  $A(1, 2; -3, 6)$ ,  $B(10; 14)$ ,  $C(-4; 12)$ .

L'objet de l'exercice est de déterminer une équation cartésienne du cercle  $\mathcal{C}$ , circonscrit au triangle  $ABC$  (c'est-à-dire au cercle qui passe par les trois points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ).

1. Rappel : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire au segment en son milieu.

(a) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $M_1$  passant par  $I(5, 6; 5, 2)$  (milieu de  $[AB]$ ) et de vecteur normal  $\overrightarrow{AB}(8, 8; 17, 6)$ .

Soit  $M(x; y)$  un point du plan. Ce point  $M$  est sur la droite  $M_1$  si et seulement si  $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ , c'est-à-dire (avec  $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-5,6 \\ y-5,2 \end{pmatrix}$ ) si :

$$\begin{aligned}(x - 5,6) \times 8,8 + (y - 5,2) \times 17,6 &= 0 \\8,8x - 49,28 + 17,6y - 91,52 &= 0 \\8,8x + 17,6y - 140,8 &= 0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne est donc

$$8,8x + 17,6y - 140,8 = 0$$

- (b) *Sans nouveau calcul, justifier que cette droite  $M_1$  est la médiatrice du segment  $[AB]$ .*

La droite  $M_1$  passe par  $I$  milieu de  $[AB]$ , et elle a pour vecteur normal  $\overrightarrow{AB}$ , donc elle est perpendiculaire à  $[AB]$  : c'est la médiatrice de  $[AB]$ .

*On admet que la droite  $M_2$ , d'équation cartésienne  $7x + y - 34 = 0$ , est la médiatrice du segment  $[BC]$ .*

2. (a) *Montrer que  $K(4;6)$  est le point d'intersection des droites  $M_1$  et  $M_2$ .*

Vérifions que les coordonnées de  $K$  vérifient les deux équations des droites.

$$M_1 : 8,8 \times 4 + 17,6 \times 6 - 140,8 = 0 \text{ donc } K \in M_1.$$

$$M_2 : 7 \times 4 + 6 - 34 = 0 \text{ donc } K \in M_2.$$

Donc le point  $K$  est sur les deux droites.

*On admet que  $K$  est le centre du cercle  $\mathcal{C}$ , circonscrit à  $ABC$ .*

- (b) *Montrer que le rayon de  $\mathcal{C}$  est 10.*

Le rayon du cercle  $\mathcal{C}$ , de centre  $K$  et passant par  $B$  (puisqu'il est circonscrit à  $ABC$ ) est :

$$\begin{aligned} BK &= \sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(4 - 10)^2 + (6 - 14)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= 10 \end{aligned}$$

3. *Sans justifier, en déduire une équation cartésienne du cercle  $\mathcal{C}$ , circonscrit à  $ABC$ , de centre  $K(4;6)$  et de rayon 10. Une équation cartésienne du cercle est :*

$$(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 10^2$$