20/11/18
DS n^o 3

Généralités sur les fonctions

1^{e}S3

Exercice 1 (Restitution organisée des connaissances — 4 points)**.**
Démontrer, aux choix, l'une des propriétés suivantes.

- La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- La courbe de la fonction carrée est en dessous de celle de la fonction $x \mapsto x$, elle-même en dessous de celle de la fonction racine carrée sur $]0; 1[$; la courbe de la fonction carrée est au dessus de celle de la fonction $x \mapsto x$, elle-même au dessus de celle de la fonction racine carrée sur $]1; +\infty[$.
- Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Pour tout nombre q différent de 1, on a :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

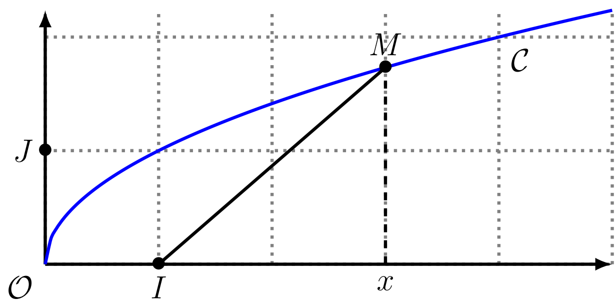
Exercice 2 (Fonction homographique — 8 points)**.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par : $f : x \mapsto \frac{2x-5}{x+2}$.

1. Montrer que pour tout x du domaine de définition, on a : $f(x) = 2 - \frac{8}{x+2}$.
2. Déterminer les variations de la fonction $x \mapsto x + 2$, puis en déduire celles de f sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

Exercice 3 (Position relative de courbes — 4 points)**.** On souhaite déterminer la position relative des courbes des fonctions f et g, définies sur $[-5;+\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{2x^2+14}$ et $g : x \mapsto x+5$.

1. On considère un nombre $x \geqslant -5$. En remarquant que $x+5 \geqslant 0$, justifier que :
   - si $\sqrt{2x^2+14} \geqslant x+5$, alors $2x^2+14 \geqslant (x+5)^2$;
   - si $2x^2+14 \geqslant (x+5)^2$, alors $\sqrt{2x^2+14} \geqslant x+5$.
2. Montrer que $2x^2+14 \geqslant (x+5)^2$ si et seulement si $x^2-10x-11 \geqslant 0$.
3. Dresser le tableau de signes de $x^2-10x-11$, et en déduire les solutions de $f(x) \geqslant g(x)$ sur l'intervalle $[-5;+\infty[$.
4. En déduire la position relative des courbes des fonctions f et g sur $[-5;+\infty[$.

Exercice 4 (Distance d'un point à une courbe — 4 points)**.** Dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, I, J)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction racine carrée, et le point I de coordonnées $(1;0)$. On cherche à déterminer la plus courte distance entre un point de la courbe $\mathcal{C}$ et le point I. La situation est illustrée sur le graphique ci-dessous.



Pour un certain nombre x positif, on appelle M le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse x.
On admet que $IM = \sqrt{x^2-x+1}$.

1. Sur $\mathbb{R}^+$, déterminer les variations du trinôme x^2-x+1, puis celles de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-x+1}$.
2. En déduire les coordonnées de M pour lesquelles la distance IM est minimale. Combien vaut-alors cette distance ?