22/05/2019 **Trigonométrie** *$1^e S$*

DM n° 8 **Suites**

Exercice 1 (Trigonométrie). *On considère un nombre x dont on ne sait rien d'autre que $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$. On souhaiterai déterminer les valeurs exactes de $\cos x$ et $\cos 2x$.*

1. *Montrer que $\cos x = \frac{2}{3}$.*

   Puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, alors :

   $$\begin{aligned}\cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{5}{9} \\ &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

   Donc $\cos x = \sqrt{\frac{4}{9}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\frac{4}{9}}$. Et c'est tout… Il y a une erreur d'énoncé : nous n'avons pas assez d'information pour conclure. Nous allons supposer, comme l'énoncé le suggère, que $\cos x = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

2. *Déterminer la valeur de $\cos 2x$.*

   $$\begin{aligned}\cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 \\ &= 2 \times \frac{4}{9} - 1 \\ &= -\frac{1}{9}\end{aligned}$$

Exercice 2 (Trigonométrie).

1. *Simplifier l'expression suivante.*

   $$A = \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}$$

Puisque $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$, alors :

$$\begin{aligned} A &= \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) \end{aligned}$$

2. *En déduire la valeur de A.* D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} A &= \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) \\ &= \sin\frac{5\pi}{5} \\ &= \sin\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 3 (Variations de suites)**.** *On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3^n}{4}$ et $v_n = -n^2 - 2n$.*

1. *Étude de u.*
   (a) *Exprimer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n.*

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{3^{n+1}}{4}}{\frac{3^n}{4}} \\ &= \frac{3^{n+1}}{3^n} \times \frac{4}{4} \\ &= 3 \end{aligned}$$

   (b) *En déduire que la suite u est croissante sur $\mathbb{N}$.* Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, donc la suite u est strictement croissante.

2. *Étude de v. Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = -x^2 - 2x$, puis en déduire les variations de v.* La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (c'est un trinôme du second degré, dont le sommet a pour abscisse $-\frac{-2}{2\times -1} = -1$). Donc la fonction f est strictement décroissante. Puisque $v_n = f(n)$ (pour tout n de $\mathbb{N}$), alors la suite v est aussi strictement décroissante.

3. *Comparer $u_{9\times 10^9}$ et $v_{9\times 10^9}$.* D'une part, $u_1 = \frac{3^1}{4} = 0,75$, et $v_1 = -1^2 - 2\times 1 = -3$ (donc $v_1 > u_1$). D'autre part, la suite u est croissante, et la suite v est décroissante. Donc :

$$v_{9\times 10^9} < v_1 < u_1 < u_{9\times 10^9}$$

Donc $v_{9\times 10^9} < u_{9\times 10^9}$.

Exercice 4 (Suite arthmético-géométrique)**.** *Une bibliothèque possède 8 000 livres. Chaque année, elle jette 5 % de ses ouvrages, obsolètes, et en achète 500 nouveaux.*
On appelle u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par « u_n est le nombre d'ouvrages de la bibliothèque au début de l'année $2017 + n$ » (ainsi, $u_0 = 8000$ est le nombre d'ouvrages en 2017, u_1 en 2018, etc.).

1. *Montrer que $u_1 = 8100$ et $u_2 = 8195$.*

   La première année, on jette 5% de 8000 livres (soit $5 \times 8000 \div 100 = 400$) et on en achète 500 nouveaux : il y a donc $u_1 = 8000 - 400 + 500 = 8100$ livres.

   La seconde année, on jette 5% de 8100 livres (soit $5 \times 8100 \div 100 = 405$) et on en achète 500 nouveaux : il y a donc $u_1 = 8100 - 405 + 500 = 8195$ livres.

2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,95u_n + 500$.*

   Supprimer 5% revient à multiplier par $0,95$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 0,95u_n + 500$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - 10000$.

3. *Montrer que v est une suite géométrique de premier terme $-2\,000$ et de raison $0,95$.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10000 \\ &= 0,95u_n + 500 - 10000 \\ &= 0,95u_n - 9500 \\ &= 0,95\left(u_n - \frac{9500}{0,95}\right) \\ &= 0,95\,(u_n - 10000) \\ &= 0,95v_n \end{aligned}$$

   Donc v est une suite géométrique, de premier terme $v_0 = u_0 - 10000 = 8000 - 10000 = -2000$, et de raison $0,95$.

4. *En déduire le terme général de v.* La suite v est géométrique, donc $v_n = -2000 \times 0,95^n$.

5. *Calculer u_{10}. Combien de livres possèdera la bibliothèque en 2027 ?* Puisque $v_n = -2000 \times 0,95^n$ et $v_n = u_n - 10000$, alors $u_n = v_n + 10000 = 10000 - 2000 \times 0,95^n$.

   Donc $u_{10} = 10000 - 2000 \times 0,95^{10} \approx 8803$. En 2027, la bibliothèque aura 8803 livres.