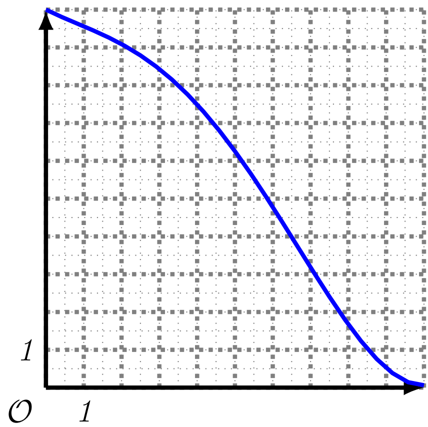
03/04/19
DM n^o^ 7

Dérivation — Corrigé

1^eS

Exercice 1 (Parc aquatique)**.** *Travaillant le bureau d'étude d'un parc aquatique, on vous demande d'étudier si un toboggan conçu pour des enfants est dangereux ou non. Tous les critères sont vérifiés, sauf le dernier qui reste à valider :*



> *Un toboggan pour enfants est dangereux si sa pente maximale est supérieure à 140 %.*

La coupe du toboggan en question est représentée ci-dessus (l'unité étant le mètre). Elle est modélisée par la fonction p définie sur l'intervalle $[0;10]$ *par :*

$$p : x \mapsto 0,003x^4 - 0,045x^3 + 0,1x^2 - 0,5x + 10$$

On cherche à répondre à la question : Ce toboggan est-il dangereux ?

On admet que dans ce contexte, la contrainte « La pente maximale est supérieure à 140% » *est équivalente à* « La dérivée de p n'est jamais inférieure à -1.4 ».

Dans cet exercice, on arrondira les résultats au millième.

1. *Montrer que $p'(x) = 0,012x^3 - 0,135x^2 + 0,2x - 0,5$.* La dérivée est :

$$\begin{aligned} p'(x) &= 0,003 \times 4 \times x^3 - 0,045 \times 3 \times x^2 + 0,1 \times 2x - 0,5 + 0 \\ &= 0,012x^3 - 0,135x^2 + 0,2x - 0,5 \end{aligned}$$

2. *Calculer l'expression de p'' dérivée de p'.* La dérivée seconde p'' est :

$$\begin{aligned} p''(x) &= 0,012 \times 3 \times x^2 - 0,135 \times 2x + 0,2 - 0 \\ &= 0,036x^2 - 0,27x + 0,2 \end{aligned}$$

3. *Montrer que le tableau de signes de p'' est le suivant, et en déduire les variations de p'.* La dérivée seconde $p''(x) = 0,036x^2 - 0,27x + 0,2$ est un trinôme de second degré, de discriminant $\Delta = (-0,27)^2 - 4 \times 0,036 \times 0,2 = 0,0441$. Il est positif, donc il y a deux racines :
   $x_1 = \frac{-(-0,27)-\sqrt{\Delta}}{2\times 0,036} \approx 0,833$
   $x_2 = \frac{-(-0,27)+\sqrt{\Delta}}{2\times 0,036} \approx 6,667$
   Le tableau de signes est donc le suivant, et nous en déduisons le tableau de variations de p'.

x	0		$0,833$		$6,667$		10
$p''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
p'	-0,5	$\nearrow$	-0,42	$\searrow$	-1,611	$\nearrow$	0

4. *Quelle est la plus petite valeur prise par p' ? Le toboggan est-il dangereux ?* La plus petite valeur prise par p' est alors $-1,611$, ce qui est inférieur à $-1,4$, donc le toboggan est dangereux.

Exercice 2 (Inéquation). *L'objet de l'exercice est de résoudre l'inéquation suivante.*

$$2x^3 - 4x^2 - 10x - 24 \geqslant 0$$

C'est une équation du troisième degré, sans factorisation évidente, donc nous ne connaissons pas de méthode générale pour la résoudre.

On pose $f : x \mapsto 2x^3 - 4x^2 - 10x - 24$.

1. *En utilisant la dérivée, montrer que le tableau de variations de f est le suivant.* La dérivée de f est $f'(x) = 6x^2 - 8x - 10$. C'est un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 6 \times (-10) = 304$. Il est positif, il y a donc deux racines : $x_1 = \frac{-(-8)-\sqrt{304}}{2\times 6} = \frac{2-\sqrt{19}}{3}$ et $x_2 = \frac{-(-8)+\sqrt{304}}{2\times 6} = \frac{2+\sqrt{19}}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{19}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{19}}{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-20	$\searrow$	-44	$\nearrow$	

2. *Compléter, sur le tableau précédent, les valeurs des extremums de f.* Voir le tableau de la question précédente, avec des arrondis à l'unité (ce qui est suffisant pour cet exercice ; j'aurais dû le préciser dans l'énoncé).
3. *Calculer $f(4)$.*

$$f(4) = 2 \times 4^3 - 4 \times 4^2 - 10 \times 4 - 24 = 0$$

4. *En déduire les solutions de l'inéquation.* Sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{2+\sqrt{19}}{3}\right]$, le maximum de la fonction est environ -20. Donc l'inéquation n'a pas de solutions.
   Sur l'intervalle $\left[\frac{2+\sqrt{19}}{3}; 4\right[$, la fonction est strictement croissante, et $f(4) = 0$, donc la fonction est strictement inférieure à 0 : pour tout $x < 4$, puisque la fonction est croissante, alors $f(x) < f(4)$, c'est-à-dire $f(x) < 0$.
   Enfin, sur l'intervalle $[4; +\infty[$, puisque la fonction est strictement croissante, alors $x \geqslant 4$, et $f(x) \geqslant f(4)$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant 0$.
   Les solutions sont donc :

$$x \geqslant 4$$