PROBABILITÉS
TRIGONOMÉTRIE

Faire l'un des exercices 1 ou 2 au choix (l'exercice 1 est plus difficile). Les exercices 3 et 4 sont obligatoires.

Exercice 1 (Jeu infini)**.** *Une kermesse propose le jeu suivant : un joueur lance un dé équilibré à six faces. Si 2, 3, 4, 5 ou 6 est obtenu, il gagne le nombre de bonbons indiqués sur le dé et le jeu s'arrête. Si 1 est obtenu, il gagne un bonbon, et relance le dé pour le même jeu.*

Par exemple : une joueuse lance le dé et obtient 1 : elle gagne un bonbon et rejoue. Elle fait à nouveau 1 : elle gagne un second bonbon. Elle relance le dé et obtient 3 : elle gagne trois bonbons et le jeu s'arrête. Elle a gagné au total 5 bonbons.

L'objet de l'exercice est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X associée au nombre de bonbons gagnés à ce jeu. La formule vue en cours ne peut pas être utilisée car le nombre de lancers n'étant pas limité, l'univers est infini.

On fait alors l'hypothèse suivante : sur un 1, plutôt que relancer le dé, on gagne $1 + E(X)$, c'est-à-dire 1 plus le gain moyen obtenu sur le second lancer (qui est identique au gain moyen du jeu). Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont alors $\{1 + E(X), 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. *Dresser la loi de probabilité de X.*

Gain	$1+E(X)$	2	3	4	5	6
Probabilité	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$

Toutes les probabilités sont égales car le dé est équilibré.

2. *En utilisant la formule de l'espérance vue en cours, montrer que $E(X) = \frac{21+E(X)}{6}$.*

$$E(X) = \frac{1}{6} \times (1 + E(X)) + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \ldots + \frac{1}{6} \times 6$$
$$E(X) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times E(X) + \frac{20}{6}$$
$$E(X) = \frac{21 + E(X)}{6}$$

3. *Résoudre l'équation pour déterminer $E(X)$.*

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{21+E(X)}{6} \\
6E(X) &= 21+E(X) \\
5E(X) &= 21 \\
E(X) &= \frac{21}{5}
\end{aligned}$$

Donc le gain moyen est $\frac{21}{5}$, soit 4,2 bonbons par partie.

Pour être rigoureux, avec cette méthode, nous n'avons pas prouvé que $E(X)$ est égale à la valeur trouvée à la question précédente : nous avons seulement montré que si l'espérance $E(X)$ existe, *elle est égale à cette valeur.*

4. Difficile. *Modifier cette expérience aléatoire, ou en inventer une nouvelle, telle que la résolution de l'équation obtenue par la même méthode qu'à la question 2 ne donne pas un résultat correct. Expliquer l'erreur en termes non mathématiques : Quelles caractéristiques de l'expérience aléatoire font que le résultat n'est pas correct ?*

   Je remplace discrètement le dé par un dé pipé qui fait toujours 1. La loi de probabilité de la variable aléatoire Y représentant la nouvelle expérience est donc :

Gain	$1+E(X)$
Probabilité	1

   Donc l'espérance est $E(X) = 1 \times (1+E(X))$, et en résolvant l'équation, on trouve $0 = 1$, ce qui est impossible. L'équation n'a donc pas de solutions.

   Le problème de cette expérience est que l'espérance est infinie : en moyenne, on « gagne » une infinité de bonbons. La méthode utilisée à la question précédente ne fonctionne donc plus.

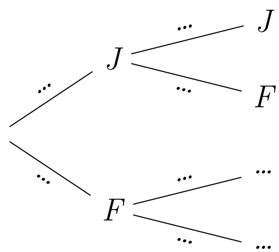
Exercice 2 (QCM)**.** *Un exercice est composé de quatre questions à choix multiple. Chaque question a trois propositions de réponses, dont une seule est correcte.*

Une réponse correcte rapporte 2 points ; une réponse incorrecte en enlève 1. Un score final négatif est ramené à zéro.

Un élève répond au hasard à ce QCM ; on note X la variable aléatoire associée au nombre de points gagnés.

1. *L'arbre de probabilité ci-dessous (dans lequel J signifie « Réponse juste » et F signifie « Réponse fausse »), qui décrit l'expérience aléatoire composée de la succession des réponses aux quatre questions, est incomplet : il ne décrit que (partiellement) les deux première questions, et il manque les probabilités.*

   Recopier et compléter cet arbre : (a) tracer les branches manquantes ; (b) écrire les probabilités ; (c) écrire, pour chaque branche, le nombre de réponses correctes, et sa probabilité.

   Voir l'arbre sur la figure 1.

2. *En utilisant l'arbre de la question précédente, recopier et compléter le tableau suivant, pour déterminer la loi de probabilité de X.*

Réponses correctes	0	1	2	3	4
Nombre de points	0	0	2	5	8
Probabilité	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

   Note : Pour calculer les probabilités, on a ajouté les probabilités de toutes les branches ayant le même nombre de réponses justes.

3. *Calculer l'espérance et la variance de X.* À la calculatrice, on obtient $E(X) \approx 1,2$, et $\sigma(X) \approx 1,7$ (donc $V(X) = \sigma(X)^2 \approx 2,9$.

4. *Quelle est la note moyenne qu'obtiendraient un grand nombre de candidats répondant au hasard ?* Ils obtiendraient une note moyenne de 1,2 sur 8.

Exercice 3 (Valeurs remarquables)**.** *Le but de l'exercice est de calculer la valeur exacte de* $\cos\frac{\pi}{12}$.

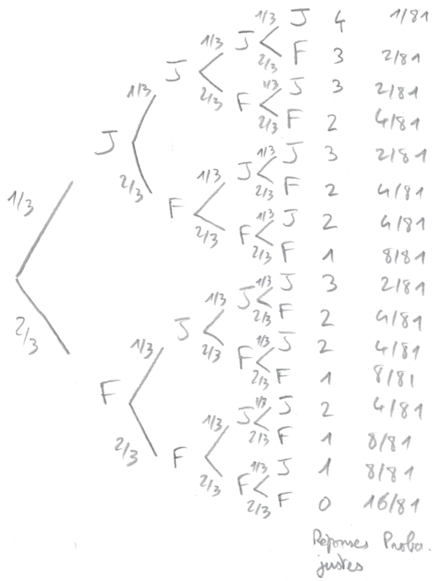
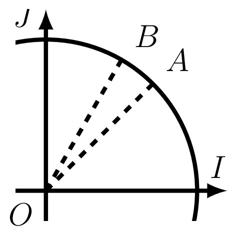


Figure 1 – Arbre de probabilité de l'exercice 2.

On considère le cercle trigonométrique, et on se place dans le repère orthonormé (O, I, J). On considère les points A et B, tels que $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{4}$ *et* $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}$.



1. (a) *Rappeler les valeurs exactes de* $\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, *et* $\sin\frac{\pi}{3}$.
   $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (b) *Déterminer les coordonnées de A et B, puis des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.* Puisque les points A et B sont sur le cercle trigonométrique, alors leurs coordonnées sont les cosinus et sinus de leurs angles, soit : $A\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

   (c) *En utilisant l'expression algébrique du produit scalaire (celle qui utilise les coordonnées des vecteurs), montrer que* $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} =$

$\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}
\end{aligned}$$

2. (a) *Démontrer, de manière aussi rigoureuse que possible, que* $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{12}$.

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) &= \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI}\right) + \left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right) \\
&= -\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right) \\
&= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \\
&= -\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} \\
&= \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

(b) *Exprimer le produit scalaire* $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ *en fonction de* $\cos\frac{\pi}{12}$. On a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$. Or puisque A et B sont sur le cercle trigonométrique, alors $OA = OB = 1$, donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos\frac{\pi}{12}$.

3. *En déduire la valeur exacte de* $\cos\frac{\pi}{12}$. Nous avons calculé le même produit scalaire de deux manières différentes. Ces deux valeurs sont donc égales, et :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$$