DM nº 2 | SUITES ARITHMÉTIQUES | *1ᵉS3*

Exercice 1.

1. *Donner les valeurs de u_1 et u_3.*
2. *On admet que u est une suite arithmétique. Préciser ses paramètres (premier terme et raison).*
3. *Exprimer u_n en fonction de n.*
4. *Sam a fini les cinquante niveaux du jeu. Combien de chats a-t-elle ramené au total ?*
5. *Donner les valeurs de u_1 et u_3.* Le terme u_1 est le nombre de chats à ramener au premier niveau, soit $u_1 = 2$. De même, $u_3 = 8$.
6. *On admet que u est une suite arithmétique. Préciser ses paramètres (premier terme et raison).* Puisque d'une part, $u_1 = 2$ et $u_3 = 8$, et que d'autre part, $u_3 = u_1 + (3-1) \times r$, alors :

$$\begin{aligned} u_3 &= u_1 + (3-1) \times r \\ 8 &= 2 + 2r \\ 6 &= 2r \\ 3 &= r \end{aligned}$$

   Donc la raison est 3, et le premier terme est $u_1 = 2$.

7. *Exprimer u_n en fonction de n.* C'est une suite arithmétique, donc $u_n = u_1 + (n-1)r = 2 + 3(n-1) = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$.
8. *Sam a fini les cinquante niveaux du jeu. Combien de chats a-t-elle ramené au total ?* On doit calculer la somme des

cinquante premiers termes de la suite :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{50} u_n &= 50 \times \frac{u_1 + u_{50}}{2} \\ &= 50 \times \frac{2 + 3 \times 50 - 1}{2} \\ &= 3775\end{aligned}$$

Elle a donc ramené au total 3775 chats.

Exercice 2 (Problème ouvert)**.** On appelle u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : u_n *est le nombre de cubes de l'étage* n *(en partant du haut)*. C'est une suite arithmétique de premier terme[1] $u_1 = 1$ et de raison 2. Donc pour n'importe quel nombre n, on a $u_n = 1 + 2(n-1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$.
Une pyramide de n étage contiendra donc $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ cubes. Puisque la petite fille dispose de 1729 cubes, alors on a :

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 + \cdots + u_n &\leqslant 1729 \\ n \times \frac{u_1 + u_n}{2} &\leqslant 1729 \\ n \times \frac{1 + 2n - 1}{2} &\leqslant 1729 \\ n \times \frac{2n}{2} &\leqslant 1729 \\ n^2 &\leqslant 1729 \\ n &\leqslant \sqrt{1729} \text{ car } n \text{ est un nombre positif.}\end{aligned}$$

Donc, puisque $\sqrt{1729} \approx 41,6$, la plus grande valeur que peut prendre n est 41.
La pyramide aura donc 41 étages.
Le nombre de cubes utilisés sera alors $41 \times \frac{u_1 + u_{41}}{2} = 41 \times \frac{1 + 2 \times 41 - 1}{2} = 1681$, et il restera $1729 - 1681 = 48$ cubes inutilisés.

1. Remarque : On aurait tout aussi bien pu prendre comme premier terme u_0 (et non pas u_1), mais cela aurait induit un décalage entre lu numéro de l'étage et l'indice du terme de la suite (le nombre de termes du 7e étage aurait alors été u_6 et non pas u_7, par exemple).