Produit scalaire

1^e^S

Exercice 1 (Perpendicularité). *L'objet de l'exercice est de trouver une condition pour que deux droites (définies par une fonction affine) soient perpendiculaires.*

Dans un repère orthonormé, on considère deux droites d_1 et d_2, d'équation respective $y = ax + b$ et $y = mx + p$, où a, b, m, p sont des nombres réels quelconque.

1. Donner (en fonction de a, b, m, p) les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de d_1 et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de d_2.
2. Montrer que $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0$ si et seulement si $a \times m = -1$.

On admet la propriété suivante :

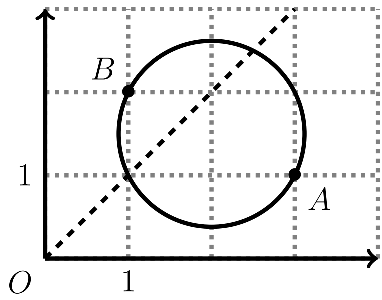
> Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux).

3. En déduire que les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires si et seulement si $a \times m = -1$.
4. Application : Soint trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, d'équations respectives :

   $$\Delta_1 : y = 2x-1 \qquad \Delta_2 : y = -0,5x+2 \qquad \Delta_3 : y = \frac{x}{3}-1$$

   Parmi ces droites, lesquelles sont perpendiculaires ?

Exercice 2 (Lieu géométrique)**.** Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3;1)$ et $B(1;2)$, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, et la droite $\mathcal{D}$, d'équation $y = x$.



L'objet de l'exercice est de déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Soit $M\ (x;y)$ un de ces points d'intersection.

1. Montrer que ni A, ni B n'est sur la droite $\mathcal{D}$.

Ainsi, A, B et M sont trois points distincts : l'angle $\widehat{AMB}$ est bien défini, et les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont non nuls.

2. *Étude du cercle $\mathcal{C}$.*
   (a) Justifier que l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.
   (b) En utilisant le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$, montrer que :
   $$(x-3)(x-1)+(y-1)(y-2)=0$$
3. En utilisant cette équation et celle de la droite $\mathcal{D}$, déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$.

Exercice 3 (Défi, optionnel)**.** Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} j = 10$$

Exercice 4 (Culture)**.** Donner un exemple de problème ou conjecture non-résolu en mathématiques, dont vous comprenez (si possible) l'énoncé.