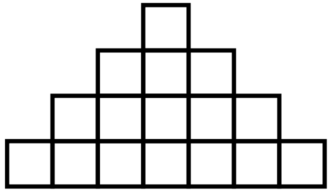
Exercice 1. *Sam joue au jeu vidéo* Cat Lady*, dans lequel elle doit aider une vieille dame en ramenant ses chats qui se sont enfuis.*
Elle doit ramener 2 chats dans le premier niveau du jeu ; 5 dans le second niveau ; 8 dans le troisième ; et ainsi de suite.
On appelle u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ *par :* u_n *est le nombre de chats que Sam doit capturer au niveau* n*.*

1. *Donner les valeurs de* u_1 *et* u_5*.* Le terme u_1 est le nombre de chats à ramener au premier niveau, soit $u_1 = 5$. Puisqu'il y a trois chats de plus à ramener à chaque niveau, on a $u_2 = 5$, $u_3 = 8$, $u_4 = 11$, $u_5 = 14$.
2. *On admet que u est une suite arithmétique. Préciser ses paramètres (premier terme et raison).* Il faut ramener à chaque niveau trois chats de plus qu'au précédent (par exemple : $u_1 - u_0 = 5 - 2 = 3$), donc la raison est 3. Le premier terme est $u_1 = 2$.
3. *Exprimer* u_n *en fonction de* n*.* C'est une suite arithmétique, donc $u_n = u_0 + (n-1)r = 2+3(n-1) = 2+3n-3 = 3n-1$.
4. *Sam a fini les cinquante niveaux du jeu. Combien de chats a-t-elle ramené au total ?* On doit calculer la somme des cinquante premiers termes de la suite :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{50} u_n &= 50 \times \frac{u_1 + u_{50}}{2} \\ &= 50 \times \frac{2 + 3 \times 50 - 1}{2} \\ &= 3775\end{aligned}$$

   Elle a donc ramené au total 3775 chats.

Exercice 2 (Problème ouvert)**.**



Une petite fille empile ses cubes comme indiqué sur la figure ci-contre (chaque étage contient deux cubes de plus que l'étage du dessus).

Combien d'étage aura la plus grande pyramide qu'elle pourra construire avec 1729 cubes ? Combien de cubes seront alors inutilisés ?

Méthode 1. *(Avec les suites)* On appelle u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : u_n *est le nombre de cubes de l'étage* n *(en partant du haut)*. C'est une suite arithmétique de premier terme[1] $u_1 = 1$ et de raison 2. Donc pour n'importe quel nombre n, on a $u_n = 1 + 2(n-1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$.
Une pyramide de n étage contiendra donc $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ cubes.
Puisque la petite fille dispose de 1729 cubes, alors on a :

$$\begin{aligned}
u_1 + u_2 + \cdots + u_n &\leqslant 1729 \\
n \times \frac{u_1 + u_n}{2} &\leqslant 1729 \\
n \times \frac{1 + 2n - 1}{2} &\leqslant 1729 \\
n \times \frac{2n}{2} &\leqslant 1729 \\
n^2 &\leqslant 1729 \\
n &\leqslant \sqrt{1729} \text{ car } n \text{ est un nombre positif.}
\end{aligned}$$

Donc, puisque $\sqrt{1729} \approx 41,6$, la plus grande valeur que peut prendre n est 41.
La pyramide aura donc 41 étages.
Le nombre de cubes utilisés sera alors $41 \times \frac{u_1 + u_{41}}{2} = 41 \times \frac{1 + 2 \times 41 - 1}{2} = 1681$, et il restera $1729 - 1681 = 48$ cubes inutilisés.

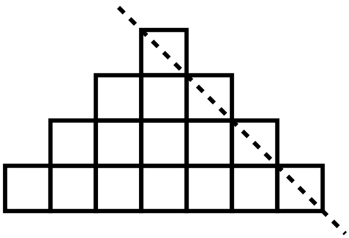
1. Remarque : On aurait tout aussi bien pu prendre comme premier terme u_0 (et non pas u_1), mais cela aurait induit un décalage entre lu numéro de l'étage et l'indice du terme de la suite (le nombre de termes du 7[e] étage aurait alors été u_6 et non pas u_7, par exemple).

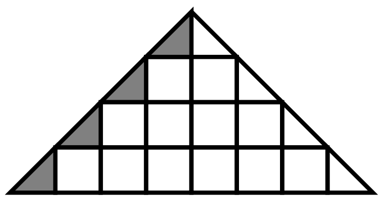
Méthode 2. *(Avec le tableur)* On construit la feuille de calcul suivante. La première colonne est le numéro de l'étage, la colonne A est le nombre de cubes de cet étage, et la colonne B le nombre de cube de la pyramide qui a ce nombre d'étage.
Pour remplir ce tableur, les cellules $A1$ et $B1$ contiennent les nombres 1, et on écrit dans la cellule $A2$: `=A1+2`, et dans la cellule $B2$: `=B1+A2`. On fait ensuite glisser les formules pour les recopier vers le bas.

Par exemple, la ligne 3 signifie : « Le 3e étage est constitué de 5 cubes, et il faut 9 cubes pour fabriquer une pyramide à 3 étages ».
On observe que la ligne 42 est la première à dépasser le nombre 1729. La plus grande pyramide possible a donc 41 étages.

	A	B
1	1	1
2	3	4
3	5	9
...		
41	81	1681
42	83	1764
43	85	1849

Méthode 3. *(Avec la géométrie)Cette méthode manque de rigueur, mais la démarche est intéressante.*





Sur chacun des étages, on découpe le demi-cube de droite (figure de gauche), puis on le « recolle » à la gauche du même étage (figure de droite). On obtient donc un triangle, dont l'aire est le nombre de cubes de la pyramide.
La base de ce triangle est le nombre de cubes du dernier étages, plus un, soit (en utilisant la suite de la méthode 1), 2n-1+1=2n.

La hauteur de ce triangle est le nombre d'étages, soit n.
Donc l'aire du triangle, qui correspond au nombre de cubes, est donc $\frac{2n\times n}{2} = n^2$.
Puisque la petite fille dispose de 1729 cubes, on cherche le plus grand n tel que $n^2 \leqslant 1729$, c'est-à-dire (puisque n est positif), le plus grand n tel que $n \leqslant \sqrt{1729}$. Puisque $\sqrt{1729} \approx 41,6$, alors $n = 41$.
La plus grande pyramide possible a 41 étages.
Méthode 4. *(Avec un algorithme)* On met en œuvre l'algorithme suivant, sur calculatrice ou sur ordinateur, où la variable *etage* représente le numéro de l'étage, *ligne* le nombre de cube à cet étage, et *total* le nombre total de cubes de la pyramide jusqu'à présent.

```
etage ← 1
ligne ← 1
total ← 1
Tant que total ⩽ 1729
    etage ← etage + 1
    ligne ← ligne + 2
    total ← total + ligne
FinTantque
Afficher(etage)
Afficher(ligne)
Afficher(total)
```

Ce programme « ajoute » des lignes à la pyramide jusqu'à ce qu'elle dépasse 1729 ; il donne comme résultat : *etage* $= 42$, *ligne* $= 83$, *total* $= 1764$, ce qui signifie que le premier étage qui utilise plus de 1729 cubes est le 42e, composé de 83 cubes. Il faut donc le retirer, et cela signifie que la pyramide aura $42 - 1 = 41$ étages composés de $1764 - 83 = 1681$ cubes. Il restera donc $1729 - 1681 = 48$ cubes inutilisés.