Exercice 1.

1. Réduire au même dénominateur $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$.
2. Développer $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 2. *On rappelle que pour tout nombre a, on a :*

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

Soit un nombre $x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\cos 2x = \frac{1}{3}$.

1. Montrer que $\cos^2 x = \frac{2}{3}$.
2. On déduire la valeur de $\cos x$.

Exercice 3. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2^n}{n}$. On souhaite déterminer les variations de la suite.

1. Calculer une approximation au centième des trois premiers termes de la suite. Conjecturer les variations de la suite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{n+1}$.
3. Résoudre l'inéquation $2n \geqslant n+1$.
4. En déduire les variations de la suite u.

Exercice 4. Une bibliothèque possède 8 000 livres. Chaque année, elle jette 5 % de ses ouvrages, obsolètes, et en achète 500 nouveaux.
On appelle u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par « u_n est le nombre d'ouvrages de la bibliothèque au début de l'année $2017+n$ » (ainsi, $u_0 = 8000$ est le nombre d'ouvrages en 2017, u_1 en 2018, etc.).

1. Montrer que $u_1 = 8100$ et $u_2 = 8195$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,95u_n + 500$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - 10000$.

3. Montrer que v est une suite géométrique de premier terme $-2\,000$ et de raison $0,95$.
4. En déduire le terme général de v.
5. Calculer v_{10}, puis en déduire le nombre de livres que possèdera la bibliothèque en 2027.