21/03/2017
DS nº 7 — B

Suites — Corrigé

1ᵉS

Exercice 1 (Termes d'une suite — 3 points)**.** *Pour chacune des suites u suivantes : (a) calculer u_2 ; (b) calculer le troisième terme. Si nécessaire, les résultats pourront être arrondis au centième.*

1. *La suite u de premier terme $u_1 = 4$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 3u_n - 2$.*
   (a) $u_1 = 4$, donc $u_2 = 3u_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10$.
   (b) Le premier terme est u_1, donc le deuxième est u_2, et le troisième est $u_3 = 3u_2 - 2 = 3 \times 10 - 2 = 28$.
2. *La suite u définie pour $n \geqslant 2$ par $u_n = \frac{1}{3n}$.*
   (a) $u_2 = \frac{1}{3\times2} = \frac{1}{6}$.
   (b) Le premier terme est u_2, donc le deuxième est u_3, et le troisième est $u_4 = \frac{1}{3\times4} = \frac{1}{12}$.

Exercice 2 (Variations — 3 points)**.** *Donner, en justifiant, les variations des suites suivantes.*

1. *u est la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = u_n - 1 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

   C'est une suite arithmétique de raison -1, négative : elle est donc décroissante.

2. *v est la suite géométrique de premier terme $v_1 = 5$ et de raison* 1. C'est une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison 1 : elle est constante.

Exercice 3 (Restitution organisée des connaissances — 3 points)**.** *Démontrer que :*

$$1+2+\cdots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}$$

Voir le cours.

Exercice 4 (Suite géométrique — 6 points)**.** *Une usine d'assemblage de voitures est rachetée en 2017 par un fond d'investissement qui exige que sa production augmente de 2 % par an. La première année, l'usine fabrique 15 000 voitures.*
On appelle v la suite, définie sur $\mathbb{N}^*$ par : v_n est le nombre (en milliers) de voitures fabriquées la n^e année après le rachat (donc v_1 est le nombre de voitures fabriquées la première année ; v_2 la deuxième année ; etc.).
On admet que v est une suite géométrique de premier terme $v_1 = 15$.

1. *Justifier que la raison de la suite v est 1,02.* Soit un nombre n entier positif. Alors v_{n+1} est égal au nombre de voitures produites l'année précédente (soit v_n), plus 2 %. Donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \frac{2}{100}v_n \\ &= v_n\left(1+\frac{2}{100}\right) \\ &= v_n \times 1,02 \end{aligned}$$

   Donc chaque terme est égal au précédent multiplié par 1,02 : la raison est 1,02.

2. *Calculer le nombre de voitures (arrondi à l'unité) produites par l'usine la douzième année.* On a : $v_{12} = v_1 \times 1,02^{12-1} = 15 \times 1,02^{11} = 18,651$. Donc la douzième année, 18 651 voitures seront produites.

3. *Calculer le nombre de voitures (arrondi à l'unité) produites par l'usine sur l'ensemble des douze premières années.* Il s'agit de calculer la somme des douze premières valeurs de la suite v, c'est-à-dire : $v_1 \times \frac{1-1{,}02^{12}}{1-1{,}02} = 201,181$. Donc sur l'ensemble des douze premières années, 201 181 voitures seront assemblées dans l'usine.

Exercice 5 (Suite arithmétique — 5 points)**.** *Une association de défense de la nature remarque qu'une usine de voitures pollue les marécages alentours. Ces marécages hébergent une espèce menacée de grenouilles, et, vu l'augmentation de la production de l'usine, l'association estime que la population de ces grenouilles diminue de 850 individus chaque année.*
La population de grenouilles est estimée par l'association à 45 000 individus en 2017.
On appelle u la suite définie sur $\mathbb{N}$ *par : « u_n est la population de grenouilles à l'année* 2017+n *» (ainsi, u_0 est la population en 2017, u_1 en 2018, et ainsi de suite).*

1. *Justifier que u est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.* Chaque année, le nombre de grenouille diminue du même nombre 850. Donc chaque terme de la suite est égal au précédent auquel on retranche 850 : c'est la définition d'une suite arithmétique de premier terme 45 000 et de raison -850.
2. *Calculer u_{12} ; interpréter ce résultat en terme de grenouilles.* On a : $u_{12} = u_0 + 12 \times (-850) = 45000 - 12 \times 850 = 34800$. En 2029, il n'y aura plus que 34 800 grenouilles.
3. *Si rien ne change, en quelle année la population de grenouilles aura-t-elle totalement disparue ?* On cherche le

dernier n tel que u_n soit positif. Donc :

$$\begin{aligned}
u_n &\geqslant 0 \\
u_0 - 850n &\geqslant 0 \\
45000 - 850n &\geqslant 0 \\
45000 &\geqslant 850n \\
\frac{45000}{850} &\geqslant n \\
52,9 &\geqslant n \text{ arrondi au dixième}
\end{aligned}$$

Donc le dernier n tel que u_n soit positif est 52. Cela signifie que 2069 (2017+52) sera la dernière année où il restera des grenouilles : elles auront disparu en 2070.