Exercice 1 (Termes d'une suite — 3 points). *Pour chacune des suites u suivantes : (a) calculer u_2 ; (b) calculer le troisième terme. Si nécessaire, les résultats pourront être arrondis au centième.*

1. *La suite u de premier terme $u_0 = 3$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 2u_n - 1$.*
   (a) $u_0 = 3$, *donc* $u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$ *et* $u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$.
   (b) *Le premier terme est* u_0*, donc le deuxième est* u_1*, et le troisième est* $u_2 = 9$.
2. La suite u définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{2n}$.
   (a) $u_2 = \frac{1}{2\times2} = \frac{1}{4}$.
   (b) Le premier terme est u_1, donc le deuxième est u_2, et le troisième est $u_3 = \frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$.

Exercice 2 (Variations — 3 points). *Donner, en justifiant, les variations des suites suivantes.*

1. *u est la suite arithmétique de premier terme $u_3 = 7$ et de raison* 0. C'est une suite arithmétique de raison 0 : elle est donc constante.
2. *v est la suite définie par :*

$$\begin{cases} v_1 = 7 \\ v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n \quad \textit{pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

   C'est une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$, qui est compris strictement entre 0 et 1 : elle est décroissante.

Exercice 3 (Restitution organisée des connaissances — 3 points)**.** *Démontrer que :*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Voir le cours.

Exercice 4 (Suite géométrique — 6 points)**.** *Une usine d'assemblage de voitures est rachetée en 2017 par un fond d'investissement qui exige que sa production augmente de 3 % par an. La première année, l'usine fabrique 10 000 voitures.*
On appelle v la suite, définie sur $\mathbb{N}^*$ par : v_n est le nombre (en milliers) de voitures fabriquées la n^e année après le rachat (donc v_1 est le nombre de voitures fabriquées la première année ; v_2 la deuxième année ; etc.).
On admet que v est une suite géométrique de premier terme $v_1 = 10$.

1. *Justifier que la raison de la suite v est 1,03.* Soit un nombre n entier positif. Alors v_{n+1} est égal au nombre de voitures produites l'année précédente (soit v_n), plus 3 %. Donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \frac{3}{100} v_n \\ &= v_n \left(1 + \frac{3}{100}\right) \\ &= v_n \times 1,03 \end{aligned}$$

   Donc chaque terme est égal au précédent multiplié par 1,03 : la raison est 1,03.

2. *Calculer le nombre de voitures (arrondi à l'unité) produites par l'usine la dixième année.* On a : $v_{10} = v_1 \times 1,03^{10-1} = 10 \times 1,03^9 = 13,048$. Donc la dixième année, 13 048 voitures seront produites.

3. *Calculer le nombre de voitures (arrondi à l'unité) produites par l'usine sur l'ensemble des dix premières années.* Il s'agit de calculer la somme des dix premières valeurs de la suite v, c'est-à-dire : $v_1 \times \frac{1-1{,}03^{10}}{1-1{,}03} = 114,639$. Donc sur l'ensemble des dix premières années, 114 639 voitures seront assemblées dans l'usine.

Exercice 5 (Suite arithmétique — 5 points)**.** *Une association de défense de la nature remarque qu'une usine de voitures pollue les marécages alentours. Ces marécages hébergent une espèce menacée de grenouilles, et, vu l'augmentation de la production de l'usine, l'association estime que la population de ces grenouilles diminue de 750 individus chaque année.*
La population de grenouilles est estimée par l'association à 35 000 individus en 2017.
On appelle u la suite définie sur $\mathbb{N}$ *par : « u_n est la population de grenouilles à l'année* $2017+n$ *» (ainsi, u_0 est la population en 2017, u_1 en 2018, et ainsi de suite).*

1. *Justifier que u est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.* Chaque année, le nombre de grenouille diminue du même nombre 750. Donc chaque terme de la suite est égal au précédent auquel on retranche 750 : c'est la définition d'une suite arithmétique de premier terme 35 000 et de raison -750.

2. *Calculer u_{10} ; interpréter ce résultat en terme de grenouilles.* On a : $u_{10} = u_0 + 10 \times (-750) = 35000 - 10 \times 750 = 27500$. En 2027, il n'y aura plus que 27 500 grenouilles.

3. *Si rien ne change, en quelle année la population de grenouilles aura-t-elle totalement disparue ?* On cherche le

dernier n tel que u_n soit positif. Donc :

$$\begin{aligned}
u_n &\geqslant 0 \\
u_0 - 750n &\geqslant 0 \\
35000 - 750n &\geqslant 0 \\
35000 &\geqslant 750n \\
\frac{35000}{750} &\geqslant n \\
46,7 &\geqslant n \text{ arrondi au dixième}
\end{aligned}$$

Donc le dernier n tel que u_n soit positif est 46. Cela signifie que 2063 (2017+46) sera la dernière année où il restera des grenouilles : elles auront disparu en 2064.