07/11/2016
DS n^o 2

Fonctions — Sujet C

1^eS

Exercice 1 (Restitution organisée des connaissances — 4 points)**.**
Démontrer, aux choix, l'une des propriétés suivantes.

— La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

— La courbe de la fonction $x \mapsto x$ est en dessous de celle de la fonction racine carrée sur $[0; 1]$, et au dessus sur $[1; +\infty[$.

— La courbe de la fonction $x \mapsto x$ est au dessus de celle de la fonction carrée sur $[0; 1]$, et en dessous sur $[1; +\infty[$.

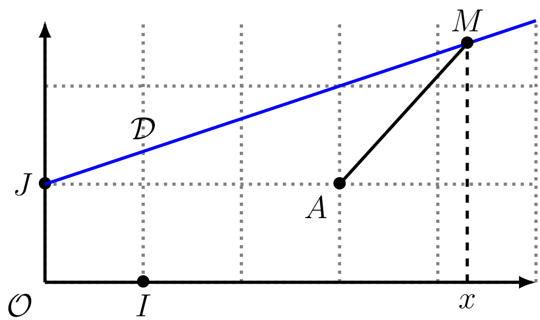
Exercice 2 (Colinéarité ; Valeur absolue — 4 points)**.**

1. On se place dans un repère quelconque. Pour un certain nombre réel x, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\binom{x}{7}$ et $\overrightarrow{v}\binom{x}{3}$. Pour quelles valeurs de x les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. Calculer la valeur approchée au centième près du nombre $\left|\frac{6}{7} - 1\right|$.
3. Donner les deux solutions de $|x| = 7$.

Exercice 3 (Position relative de courbes — 6 points)**.** On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3+x^2-2x-1$ et $g : x \mapsto x^3 + 2x^2 + x - 5$. On souhaite étudier la position relative de ces deux courbes, appelées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ si et seulement si $-x^2 - 3x + 4 \geqslant 0$.
2. Dresser le tableau de signes du trinôme $-x^2 - 3x + 4$.
3. En déduire sur quel(s) intervalle(s) $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$.

Exercice 4 (Distance d'un point à une droite — 6 points)**.** Dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, I, J)$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \frac{x}{3} + 1$, et le point A de coordonnées $(3; 1)$. On cherche à déterminer la plus courte distance entre un point de la droite $\mathcal{D}$ et le point A (on appelle ce nombre *distance de A à la droite $\mathcal{D}$*). La situation est illustrée sur le graphique ci-dessous.



Pour un certain nombre x positif, on appelle M le point de la courbe $\mathcal{D}$ d'abscisse x.

1. Montrer que $AM = \sqrt{\frac{10}{9}x^2 - 6x + 9}$.
2. Sur $\mathbb{R}^+$, déterminer les variations du trinôme $\frac{10}{9}x^2 - 6x + 9$, puis celles de la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{10}{9}x^2 - 6x + 9}$.
3. En déduire les coordonnées de M pour lesquelles la distance AM est minimale. Quelle est la distance de A à la droite $\mathcal{D}$?