Lieu géométrique

Faire un des deux exercices 1 ou 2 au choix (l'exercice 2 est plus difficile). L'exercice 3 est obligatoire.

Exercice 1 (Lieu géométrique)**.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(13; 9)$ et de rayon 6 ;
- la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(4; 3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}(2; -1)$.

On cherche à déterminer les coordonnées des intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$, puis en déduire que son équation réduite est $y = 2x - 5$.

On considère un point $M(x; y)$ du plan.

3. Montrer que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :
$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x-13)^2 + (2x-14)^2 = 36 \end{cases}$$
4. En déduire que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :
$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{cases}$$
5. Résoudre la seconde équation, et en déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 2 (Lieu géométrique)**.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le nombre réel α ;
- le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(13; 9)$ et de rayon 6 ;
- la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(4; 3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}(\alpha; -1)$.

On cherche à déterminer le nombre de points d'intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$, puis en déduire que son équation réduite est $y = \alpha x - 4\alpha + 3$.

On considère un point $M(x; y)$ du plan.

3. Montrer que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :
$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x-13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 = 36 \end{cases}$$
4. En déduire que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :
$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ \left(\alpha^2+1\right)x^2 - \left(8\alpha^2 + 12\alpha + 26\right)x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 169 = 0 \end{cases}$$

Puisque les solutions de la seconde équation correspondent aux valeurs possible de x (abscisse des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$), et que pour chaque abscisse il n'y a qu'une ordonnée correspondante (d'après la première équation), alors le nombre de solutions de la seconde équation correspond au nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
On calcule le discriminant de l'expression précédente, soit :
$$\Delta = \left(8\alpha^2 + 12\alpha + 26\right)^2 - 4 \times \left(\alpha^2 + 1\right)\left(16\alpha^2 + 48\alpha + 169\right)$$
Pour éviter les erreurs de calculs, on fait développer cette expression par le logiciel de calcul formel Xcas[1].

`developper`$((8\alpha^2 + 12\alpha + 26)^2 - 4 * (\alpha^2 + 1) * (16\alpha^2 + 48\alpha + 169))$
$-180 * \alpha^2 + 432 * \alpha$

5. Dresser, en fonction de α, le tableau de signes de l'expression $-180\alpha^2 + 432\alpha$.
6. En déduire, en fonction de α, le nombre de solutions du système de la quetion 4, puis le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 3 (Culture générale)**.** Répondre à au moins une des deux questions suivantes.

1. Raconter une blague mathématique qui vous fasse rire (au sens large : citation amusante, histoire drôle, bande dessinée ou dessin d'humour, etc.).
2. Citer une œuvre d'art ayant pour objet les mathématiques, c'est-à-dire :
   — donner son titre (si elle en a un), le nom de l'auteur, la date de création ;
   — si c'est un texte, recopier ou imprimer l'œuvre ou un extrait ; si c'est une œuvre plastique, en imprimer une photographie (ou me l'envoyer par courriel) ; si c'est une musique, me l'envoyer par courriel (ou un lien vers celle-ci) ; etc.

1. C'est un logiciel libre et gratuit, que vous pouvez télécharger et installer gratuitement et légalement sur GNU/Linux, Windows et MacOS : `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html`.