

Exercice 1. À la naissance de Sam, ses grands-parents lui ouvrent un compte en banque, et versent dessus 10€ le jour de son premier anniversaire, 20€ le jour de son second anniversaire, 30€ le jour de son troisième anniversaire, jusqu'à 180€ le jour de son 18^e anniversaire. On aimerait savoir combien d'argent auront versés les grands-parents lorsque Sam aura 18 ans.

On appelle u la suite définie sur \mathbb{N}^* par : u_n est la somme d'argent versée par les grands-parents le jour du n^e anniversaire de Sam.

1. Donner les valeurs de u_1 et u_{10} . Les termes u_1 et u_{10} correspondent à la somme d'argent versée aux premier et dixième anniversaire, soit $u_1 = 10$ et $u_{10} = 100$.
2. Exprimer u_n en fonction de n . Les grands-parents versent dix fois l'âge de Sam à chaque anniversaire, donc $u_n = 10n$.
3. Justifier que u est une suite arithmétique dont on précisera les paramètres (premier terme et raison).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 10(n+1) - 10n \\ &= 10n + 10 - 10n \\ &= 10\end{aligned}$$

Donc la différence est constante, et la suite est donc arithmétique de premier terme $u_1 = 10$ et de raison 10.

4. Déterminer combien d'argent auront donné les grands-parents de Sam lorsqu'il aura 18 ans. Cela correspond à la somme

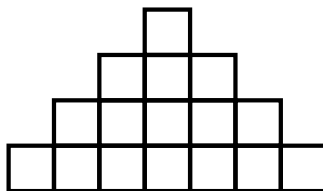
des dix-huit premiers termes de la suite, soit :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{18} u_n &= 18 \times \frac{u_1 + u_{18}}{2} \\ &= 18 \times \frac{10 + 180}{2} \\ &= 1710\end{aligned}$$

Donc les grands-parents auront versé au total 1710€.

Exercice 2 (Problème ouvert).

Une petite fille empile ses cubes comme indiqué sur la figure ci-contre (chaque étage contient deux cubes de plus que l'étage du dessus).



Combien d'étage aura la plus grande pyramide qu'elle pourra construire avec 1729 cubes ?

Méthode 1. Avec les suites On appelle u la suite définie sur \mathbb{N}^* par : u_n est le nombre de cubes de l'étage n (en partant du haut). C'est une suite arithmétique de premier terme¹ $u_1 = 1$ et de raison 2. Donc pour n'importe quel nombre n , on a $u_n = 1 + 2(n - 1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$.

Une pyramide de n étage contiendra donc $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ cubes.

1. Remarque : On aurait tout aussi bien pu prendre comme premier terme u_0 (et non pas u_1), mais cela aurait induit un décalage entre le numéro de l'étage et l'indice du terme de la suite (le nombre de termes du 7^e étage aurait alors été u_6 et non pas u_7 , par exemple).

Puisque la petite fille dispose de 1729 cubes, alors on a :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq 1729$$

$$n \times \frac{u_1 + u_n}{2} \leq 1729$$

$$n \times \frac{1 + 2n - 1}{2} \leq 1729$$

$$n \times \frac{2n}{2} \leq 1729$$

$$n^2 \leq 1729$$

$$n \leq \sqrt{1729} \text{ car } n \text{ est un nombre positif.}$$

Donc, puisque $\sqrt{1729} \approx 41,6$, la plus grande valeur que peut prendre n est 41.

La pyramide aura donc 41 étages.

Méthode 2. Avec le tableur On construit la feuille de calcul suivante. La première colonne est le numéro de l'étage, la colonne A est le nombre de cubes de cet étage, et la colonne B le nombre de cube de la pyramide qui a ce nombre d'étage.

Pour remplir ce tableur, les cellules A1 et B1 contiennent les nombres 1, et on écrit dans la cellule A2 : =A1+2, et dans la cellule B2 : =B1+A2. On fait ensuite glisser les formules pour les recopier vers le bas.

Par exemple, la ligne 3 signifie : « Le 3^e étage est constitué de 5 cubes, et il faut 9 cubes pour fabriquer une pyramide à 3 étages ».

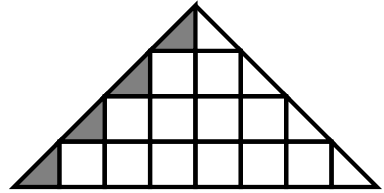
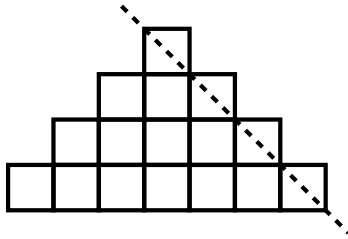
	A	B
1	1	1
2	3	4
3	5	9

...

On observe que la ligne 42 est la première à dépasser le nombre 1729. La plus grande pyramide possible a donc 41 étages.

41	81	1681
42	83	1764
43	85	1849

Méthode 3. Avec la géométrie *Cette méthode manque un petit peu de rigueur, mais la démarche est intéressante.*



Sur chacun des étages, on découpe le demi-cube de droite (figure de gauche). Puis on « recolle » ce demi-cube à la gauche de l'étage (figure de droite). On obtient donc un triangle, dont l'aire est le nombre de cubes de la pyramide.

La base de ce triangle est le nombre de cubes du dernier étages, plus un, soit (en utilisant la suite de la méthode 1), $2n-1+1=2n$. La hauteur de ce triangle est le nombre d'étages, soit n .

Donc l'aire du triangle, qui correspond au nombre de cubes, est donc $\frac{2n \times n}{2} = n^2$.

Puisque la petite fille dispose de 1729 cubes, on cherche le plus grand n tel que $n^2 \leq 1729$, c'est-à-dire (puisque n est positif), le plus grand n tel que $n \leq \sqrt{1729}$. Puisque $\sqrt{1729} \approx 41,6$, alors $n = 41$.

La plus grande pyramide possible a 41 étages.

Méthode 4. Avec les carrés *Le raisonnement ici est le même que celui de la méthode 1, mais avec peu de rigueur.* On calcule, à la main, le nombre de cubes nécessaire pour faire une pyramide de quelques étages.

On obtient : pour 1 étage, 1 cube ; pour 2 étage, 4 cubes ; pour 3 étage, 9 cubes ; pour 4 étage, 16 cubes ; etc. On remarque² que pour n étages, il faut n^2 cubes.

Puisque l'on dispose de 1729 cubes, on cherche le plus grand n tel que $n^2 \leq 1729$, c'est-à-dire (puisque n est positif), le plus grand n tel que $n \leq \sqrt{1729}$. Enfin, puisque $\sqrt{1729} \approx 41,6$, cela donne $n = 41$.

La plus grande pyramide possible possède 41 étages.

2. Pour être rigoureux, il faudrait prouver cette relation. C'est l'objet de la méthode 1.