29/04/16
DS nº 7 — B

Trigonométrie
Suites

1^e S6

Exercice 1 (Angles associés — 2 points)**.** *Simplifier au maximum l'expression suivante.*

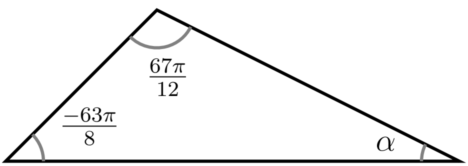
$$\begin{aligned} E &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin -x-\sin\left(\pi+x\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \\ &= \sin x-\sin x-\left(-\sin x\right)-2\sin x \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

Exercice 2 (Équations trigonométriques — 4 points)**.**

1. *Résoudre l'équation* $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Puisque $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors l'équation est équivalente à $\sin x=\sin\frac{\pi}{3}$, et donc $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ (où $k\in\mathbb{Z}$).
2. *Quelles sont les solutions de cette équation comprises dans l'intervalle* $[0;4\pi]$ *?*
   — Si $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, alors les valeurs de x comprises dans l'intervalle considéré sont $\frac{\pi}{3}$ et $2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$.
   — Si $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, alors les valeurs de x comprises dans l'intervalle considéré sont $\frac{2\pi}{3}$ et $2\pi+\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$.

   Les solutions sont donc $\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right\}$.

Exercice 3 (Triangle — 2 points)**.** *Donner la mesure principale, en radians, de l'angle α (les mesures données sont celles des angles orientés dans le sens direct).*



Puisque la somme des trois angles d'un triangle fait π, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{67\pi}{12} + \frac{-63\pi}{8} + \alpha = \pi \\
\alpha &= \pi - \frac{67\pi}{12} + \frac{63\pi}{8} \\
\alpha &= \frac{24\pi}{24} - \frac{134\pi}{24} + \frac{189\pi}{24} \\
\alpha &= \frac{(24 - 134 + 189)\,\pi}{24} \\
\alpha &= \frac{79\pi}{24}
\end{aligned}$$

Donc $\alpha = \frac{79\pi}{24}$. La mesure principale de cet angle est :

$$\begin{aligned}
\frac{79\pi}{24} - 2 \times 2\pi &= \frac{79\pi}{24} - \frac{96\pi}{24} \\
&= -\frac{17\pi}{24}
\end{aligned}$$

Exercice 4 (Suites numériques — 4 points)**.** *Pour chacune des suites u suivantes : (a) calculer u_5 ; (b) calculer le deuxième terme.*

1. *La suite u est définie pour $n \geqslant 2$ par $u_n = 6n^2 - 2$.*
   (a) $u_5 = 6 \times 5^2 - 2 = 148$
   (b) Le premier terme est u_2, donc le deuxième est $u_3 = 6 \times 3^2 - 2 = 52$.
2. *La suite u est une suite de premier terme $u_3 = 6$ telle que, pour tout $n \geqslant 3$, on a $u_{n+1} = 3 + \frac{u_n}{2}$.*
   (a) $u_3 = 6$, donc $u_4 = 3 + \frac{6}{2} = 6$, $u_5 = 3 + \frac{6}{2} = 6$.
   (b) Le premier terme étant u_2, le deuxième terme est donc u_3, soit 6.

Exercice 5 (Datation au carbone 14 — 8 points)**.** *Le carbone 14 est un corps radioactif présent naturellement chez les êtres vivants. On admet que :*

- *à la mort d'un être vivant, la concentration de carbone 14 est égale à* 10^{-12} *(l'unité est arbitraire) ;*
- *dans un cadavre, la concentration de carbone 14 diminue de 1,24 % par siècle.*

On définit la suite c sur $\mathbb{N}$ *par :* c_n *est la concentration de carbone 14 dans un cadavre après n siècles. On a donc :* $c_0 = 10^{-12}$.

1. *Prouver que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a :* $c_{n+1} = 0,9876c_n$*.* Puisque la concentration diminue chaque siècle de 1,24 %, alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n - 1,24\% \times c_n \\ &= (1 - 1,24\%)\, c_n \\ &= (1 - 0,0124)\, c_n \\ &= 0,9876c_n \end{aligned}$$

2. *Quelle est la nature de la suite c ? Donner alors ses caractéristiques.* La suite est donc une suite géométrique de premier terme $c_0 = 10^{-12}$ et de raison $0,9876$.
3. *En déduire le terme général de c.* Le terme général d'une suite géométrique de premier terme v_0 est $v_n = v_0 \times q^n$. Donc $c_n = 10^{-12} \times 0,9876^n$.
4. *Un os a été découvert sur un site archéologique, dont la teneur en carbone 14 est* $6,0 \times 10^{-13}$*. Déterminer un encadrement de la date de la mort de l'animal auquel appartenait cet os, à 500 ans près. On pourra s'aider de la table suivante.*

n	5	10	15	20	25
$0,9876^n$	0,94	0,88	0,83	0,80	0,73

n	30	35	40	45	50
$0,9876^n$	0,69	0,65	0,61	0,57	0,54

On cherche un entier n tel que :

$$\begin{aligned} c_n &= 6,0 \times 10^{-13} \\ 10^{-12} \times 0,9876^n &= 6,0 \times 10^{-13} \\ 0,9876^n &= \frac{6,0 \times 10^{-13}}{10^{-12}} \\ 0,9876^n &= 6,0 \times 10^{-1} \\ 0,9876^n &= 0,60 \end{aligned}$$

En regardant sur la table, on observe que $0,9876^{40} \approx 0,61$ et $0,9876^{45} \approx 0,57$. Donc n est compris entre 40 et 45. L'âge de l'os est donc compris entre 40 et 45 siècles.