

Exercice 1 (Équations trigonométriques — 4 points).

1. Résoudre l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Puisque $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors l'équation est équivalente à $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$, et donc $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$).
2. Quelles sont les solutions de cette équation comprises dans l'intervalle $[0; 4\pi]$?

— Si $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, alors les valeurs de x comprises dans l'intervalle considéré sont $\frac{\pi}{4}$ et $2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$.

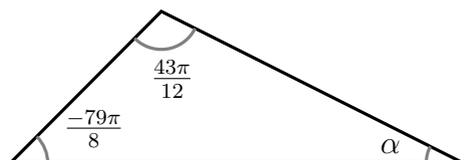
— Si $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, alors les valeurs de x comprises dans l'intervalle considéré sont $\frac{3\pi}{4}$ et $2\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$.

Les solutions sont donc $\left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4} \right\}$.

Exercice 2 (Angles associés — 2 points). Simplifier au maximum l'expression suivante.

$$\begin{aligned} E &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos -x - \cos (\pi + x) + 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \\ &= \cos x + \cos x - (-\cos x) + 2 \cos x \\ &= 5 \cos x \end{aligned}$$

Exercice 3 (Triangle — 2 points). Donner la mesure principale, en radians, de l'angle α .



Puisque la somme des trois angles d'un triangle fait π , on a :

$$\begin{aligned}\frac{43\pi}{12} + \frac{-79\pi}{8} + \alpha &= \pi \\ \alpha &= \pi - \frac{43\pi}{12} + \frac{79\pi}{8} \\ \alpha &= \frac{24\pi}{24} - \frac{86\pi}{24} + \frac{237\pi}{24} \\ \alpha &= \frac{(24 - 86 + 237)\pi}{24} \\ \alpha &= \frac{175\pi}{24}\end{aligned}$$

Donc $\alpha = \frac{175\pi}{24}$. La mesure principale de cet angle est :

$$\begin{aligned}\frac{175\pi}{24} - 4 \times 2\pi &= \frac{175\pi}{24} - \frac{192\pi}{24} \\ &= -\frac{17\pi}{24}\end{aligned}$$

Exercice 4 (Suites numériques — 4 points). *Pour chacune des suites u suivantes : (a) calculer u_4 ; (b) calculer le troisième terme.*

- La suite u est une suite de premier terme $u_2 = 8$ telle que, pour tout $n \geq 2$, on a $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}$.*
 - $u_2 = 8$, donc $u_3 = 1 + \frac{8}{2} = 5$, $u_4 = 1 + \frac{5}{2} = 3,5$.
 - Le premier terme étant u_2 , le troisième terme est donc u_4 , soit 3,5.
- La suite u est définie pour $n \geq 3$ par $u_n = 7n^2 - 1$.*
 - $u_4 = 7 \times 4^2 - 1 = 111$
 - Le premier terme est u_3 , donc le troisième est $u_5 = 7 \times 5^2 - 1 = 174$.

Exercice 5 (Datation au carbone 14 — 8 points). *Le carbone 14 est un corps radioactif présent naturellement chez les êtres vivants. On admet que :*

- à la mort d'un être vivant, la concentration de carbone 14 est égale à 10^{-12} (l'unité est arbitraire) ;
- dans un cadavre, la concentration de carbone 14 diminue de 1,24 % par siècle.

On définit la suite c sur \mathbb{N} par : c_n est la concentration de carbone 14 dans un cadavre après n siècles. On a donc : $c_0 = 10^{-12}$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $c_{n+1} = 0,9876c_n$.
Puisque la concentration diminue chaque siècle de 1,24 %, alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}c_{n+1} &= c_n - 1,24\% \times c_n \\ &= (1 - 1,24\%) c_n \\ &= (1 - 0,0124) c_n \\ &= 0,9876c_n\end{aligned}$$

2. Quelle est la nature de la suite c ? Donner alors ses caractéristiques. La suite est donc une suite géométrique de premier terme $c_0 = 10^{-12}$ et de raison 0,9876.
3. En déduire le terme général de c . Le terme général d'une suite géométrique de premier terme v_0 est $v_n = v_0 \times q^n$. Donc $c_n = 10^{-12} \times 0,9876^n$.
4. Un os a été découvert sur un site archéologique, dont la teneur en carbone 14 est $7,0 \times 10^{-13}$. Déterminer un encadrement de la date de la mort de l'animal auquel appartenait cet os, à 500 ans près. On pourra s'aider de la table suivante.

n	5	10	15	20	25
$0,9876^n$	0,94	0,88	0,83	0,80	0,73
n	30	35	40	45	50
$0,9876^n$	0,69	0,65	0,61	0,57	0,54

On cherche un entier n tel que :

$$\begin{aligned}
 c_n &= 7,0 \times 10^{-13} \\
 10^{-12} \times 0,9876^n &= 7,0 \times 10^{-13} \\
 0,9876^n &= \frac{7,0 \times 10^{-13}}{10^{-12}} \\
 0,9876^n &= 7,0 \times 10^{-1} \\
 0,9876^n &= 0,70
 \end{aligned}$$

En regardant sur la table, on observe que $0,9876^{25} \approx 0,73$ et $0,9876^{30} \approx 0,69$. Donc n est compris entre 25 et 30. L'âge de l'os est donc compris entre 25 et 30 siècles.