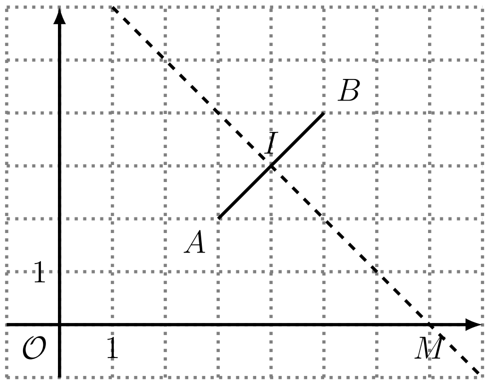
Produit scalaire
Probabilités

Exercice 1 (Médiatrice — 6 points)**.** *Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3;2)$ et $B(5,4)$. On appelle I le milieu du segment $[AB]$, et d la médiatrice de $[AB]$.*

L'objet de l'exercice est de déterminer les coordonnées $M(x;y)$, intersection de d avec l'axe des abscisses.

1. *Faire une figure.*



2. *Montrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IM}$ sont $\binom{x-4}{-3}$.* Puisque I est le milieu de $[AB]$, ses coordonnées sont $I\binom{\frac{x_A+x_B}{2}}{\frac{y_A+y_B}{2}}$, soit $I\binom{4}{3}$. Donc les coordonnées de $\overrightarrow{IM}$ sont $\binom{x_M-x_I}{y_M-y_I}$. Mais puisque M est sur l'axe des abscisses, $y_M=0$, et $\binom{x-4}{-3}$.
3. *Justifier que $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$.* Remarquons d'abord que $\overrightarrow{IM}\neq 0$ et $\overrightarrow{AB}\neq 0$ (car M est sur l'axe des abscisses, contrairement à I). De plus, puisque I et M sont sur la médiatrice de $[AB]$, les droites (IM) et (AB) sont perpendiculaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux, et $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$.
4. *En déduire les coordonnées de M.* D'après les questions précédentes, on

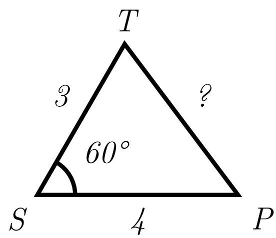
a $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$, et $\overrightarrow{IM}\binom{x-4}{-3}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{2}{2}$.

$$\begin{aligned}(x-4)\times 2+(-3)\times 2 &= 0\\ 2x-8-6 &= 0\\ 2x-14 &= 0\\ 2x &= 14\\ x &= 7\end{aligned}$$

Donc il y a un seul point d'intersection entre la médiatrice et l'axe des abscisses, qui a pour coordonnées $M\binom{7}{0}$.

Exercice 2 (Calcul de longueur — 2 points)**.** *Pour installer un câble entre une tour T et un pylône P, on aimerait connaitre la distance qui les sépare. Malheureusement, le terrain accidenté entre eux rend une mesure directe difficile.*

En revanche, on a pu mesurer la distance de ces deux objets par rapport à un sapin S situé un peu plus loin, ainsi que l'angle formé par ces trois objets. Ces mesures sont schématisées dans le graphique suivant. Toutes les longueurs sont données en hectomètres.



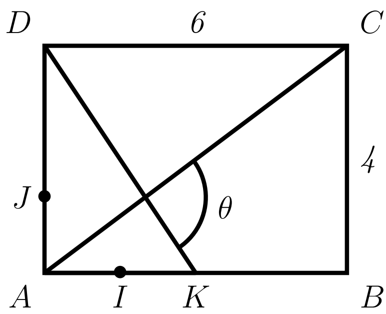
En utilisant le théorème d'Al Kashi, calculer une approximation de la longueur TP au mètre près (on rappelle que $\cos 60 = \frac{1}{2}$*).*

On applique le théorème d'Al Kashi.

$$\begin{aligned}TP^2 &= TS^2 + SP^2 - 2\times TS\times SP\times \cos\widehat{TSP}\\ TP^2 &= 3^2+4^2-2\times 3\times 4\times\cos 60\\ TP^2 &= 13\\ TP &= \sqrt{13}\\ TP &\approx 3,606\end{aligned}$$

Donc $TP \approx 3{,}606\,\text{hm} \approx 360{,}6\,\text{m} \approx 361\,\text{m}$.

Exercice 3 (Calcul d'angle — 8 points). *On considère la figure suivante, où $ABCD$ est un rectangle, K est le milieu de $[AB]$, et $AI = AJ = 1$. Toutes les longueurs sont données en centimètres.*



Le but de l'exercice est de déterminer une mesure de l'angle θ.

1. (a) *Calculer la longueur des segments $[AC]$ et $[DK]$.*

   On se place dans le triangle ABC, rectangle en B, et on y applique le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 4^2 = 52$. Donc $AC = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$.

   De même, dans le triangle ADK rectangle en A, on a : $DK^2 = AK^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. Donc $DK = \sqrt{25} = 5$.

   (b) *En déduire que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DK} = 10\sqrt{13}\cos\theta$.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DK} &= AC \times DK \times \cos\theta \\ &= 2\sqrt{13} \times 5\cos\theta \\ &= 10\sqrt{13}\cos\theta\end{aligned}$$

2. *On se place dans le repère orthonormé (A, I, J). Donner, sans justifier, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DK}$, puis en déduire que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DK} = 2$.* On a $\overrightarrow{AC}\,(6; 4)$ et $\overrightarrow{DK}\,(3; -4)$, donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DK} = 6 \times 3 + 4 \times (-4) = 18 - 16 = 2$.

3. *En déduire une valeur approchée au dixième de degré de θ.* Nous avons

calculé de deux manières différentes ce même produit scalaire, donc :

$$\begin{aligned}
10\sqrt{13}\cos\theta &= 2 \\
5\sqrt{13}\cos\theta &= 1 \\
\cos\theta &= \frac{1}{5\sqrt{13}} \\
\theta &= \arccos\frac{1}{5\sqrt{13}} \\
\theta &\approx 86,8^\circ
\end{aligned}$$

Exercice 4 (Probabilités — 4 points). *Dans le cadre d'une kermesse, on a réalisé un jeu de hasard. La loi de probabilité (incomplète) de la variable X, qui à ce jeu associe le nombre de bonbons gagnés, est la suivante.*

x_i	1	2	3	5	10
$P(X = x_i)$	?	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	?

1. *On veut qu'il y ait autant de chances de gagner 1 bonbon que de gagner 10 bonbons. Calculer la probabilité de gagner 1 bonbon.*

   On appelle p la probabilité de gagner 10 bonbons. Donc la probabilité de gagner 1 bonbon est également p. Puisque la somme des probabilités des évènements élémentaires est égale à 1, on a :

$$\begin{aligned}
p + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + p &= 1 \\
2p + \frac{1}{18} + \frac{3}{18} + \frac{2}{18} &= 1 \\
2p + \frac{6}{18} &= 1 \\
2p &= 1 - \frac{6}{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2p &= 1 - \frac{1}{3} \\
2p &= \frac{2}{3} \\
p &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

   Il y a donc une chance sur trois de gagner dix bonbons.

2. *Calculer $P(X \leqslant 3)$.* L'évènement $X \leqslant 3$ est égal à l'ensemble des trois évènements élémentaires $X = 3$, $X = 2$ et $X = 1$. Donc $P(X \leqslant 3) = P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{6}{18} + \frac{1}{18} + \frac{3}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$.