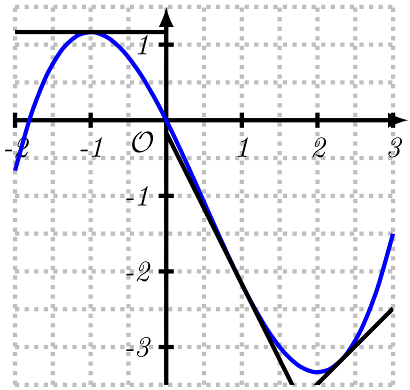
Généralités sur les fonctions

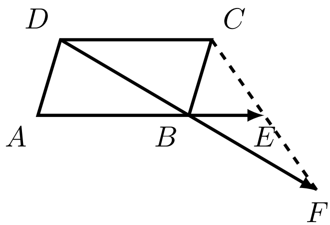
Exercice 1 (Dérivation — 3 points)**.** *On considère la fonction f, dont voici la représentation graphique.*



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.
Les trois tangentes ont été tracées sur la figure.

1. *Combien vaut $f'(1)$?* $f'(1) = -2$
2. *Combien vaut $f'(-1)$?* $f'(-2) = 0$
3. *Donner un nombre x tel que $f'(x) = 1$.* $f'(2,3) = f'(-1.3) = 1$

Exercice 2 (Vecteurs — 8 points)**.** *Soit $ABCD$ un parallélogramme. On place les points E tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$, et F tel que $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{AD}$.*



1. *Faire une figure.*
2. *Montrer que $\overrightarrow{CE} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} - \overrightarrow{AD}$.* Comme dans la question suivante, on utilise la relation de Chasles, la relation du parallélogramme ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, et la définition du point E).

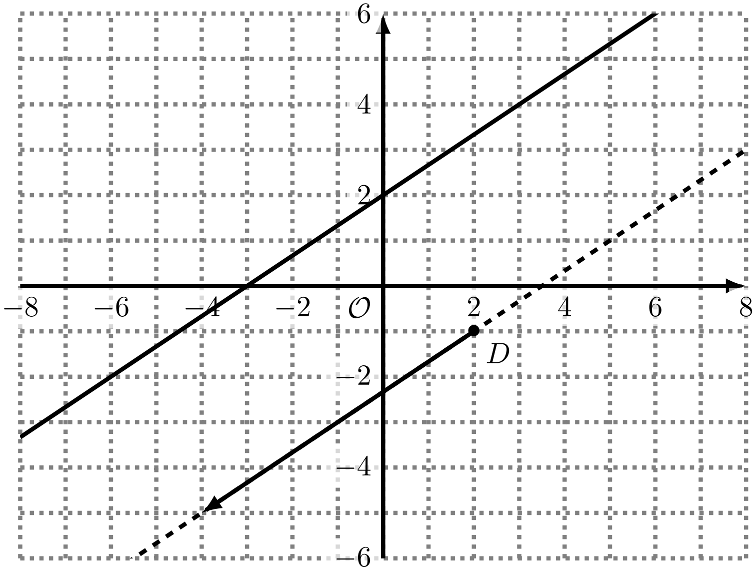
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} \\ &= \overrightarrow{DA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \\ &= -\overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}\end{aligned}$$

3. *Exprimer $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} \\ &= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

4. *Que peut-on dire des points E, C et F ?* On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$. D'après les questions précédentes, dans ce repère, on a $\overrightarrow{CE}\binom{\frac{1}{2}}{-1}$ et $\overrightarrow{CF}\binom{-1}{2}$. Vérifions la relation de colinéarité : $\frac{1}{2} \times 2 - (-1) \times (-1) = 1 - 1 = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires, et les points C, E, F sont alignés.

Exercice 3 (Droites — 9 points)**.** *Le plan est rapporté au repère orthonormé ci-dessous.*



1. *Tracer la droite d d'équation $y = \frac{2}{3}x + 2$.*
   Préciser son coefficient directeur et donner un de ses vecteurs directeurs. Son coefficient directeur est $\frac{2}{3}$. Un de ses vecteurs directeurs est donc le vecteur de coordonnées $\binom{1}{\frac{2}{3}}$.
2. *Vérifier que les points $A(3; 4)$ et $B(-3; 0)$ sont des points de d.* Ces points sont sur la droite si leurs coordonnées vérifient l'équation de la droite.
   Premièrement, $\frac{2}{3} \times 3 + 2 = 2 + 2 = 4$, donc $A\,(3; 4)$ appartient à la droite. De même, $\frac{2}{3} \times (-3 + 2 = -2 + 2 = 0)$, donc $B\,(-3; 0)$ appartient aussi à la droite.
3. *Construire la droite Δ passant par le point $D(2; -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(-6, -4)$. Déterminer une équation cartésienne de Δ.*
   Soit $M\,(x; y)$ un point du plan. Ce point appartient à la droite Δ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DM}\binom{x-2}{y+1}$ et $\overrightarrow{v}$ sont

colinéaires, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned}(x-2)\times(-4)-(y+1)\times(-6)&=0\\ -4x+8+6y+6&=0\\ -4x+6y+14&=0\end{aligned}$$

L'équation $-4x+6y+14=0$ est donc une équation cartésienne de la droite.

4. *Démontrer que les droites d et Δ sont parallèles.* Les deux droites ont pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}\binom{1}{\frac{2}{3}}$ et $\overrightarrow{v}\binom{-6}{-4}$. Vérifions la condition de colinéarité : $1\times(-4)-(-6)\times\frac{2}{3}=-4+4=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Les droites d et Δ ont donc leurs vecteurs directeurs colinéaires : elles sont parallèles.