# Généralités sur les fonctions



**Exercice 1** (Restitution organisée des connaissances — 4 points)**.** *Voir le cours.*

**Exercice 2** (Position relative — 2 points)**.** *Déterminer la position relative des courbes des fonctions $f : x \mapsto x^2 - 1$ et $g : x \mapsto x$, définies sur $\mathbb{R}$.* La courbe $\mathcal{C}_f$ de $f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ de $g$ en $x$ si et seulement si $f(x) \geqslant g(x)$. Résolvons cette inéquation.

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant g(x) \\ x^2 - 1 &\geqslant x \\ x^2 - x - 1 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré, dont le facteur du $x^2$ est positif. La fonction est donc négative entre les racines, et positive à l'extérieur. Déterminons ces racines.

Le discriminant $\Delta$ vaut $(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$. Il est positif, donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{\Delta}}{2\times(-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{\Delta}}{2\times(-1)} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Donc l'équation est vérifiée pour $x \in \left]-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right[$. Donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur ce même intervalle $\left]-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right[$.

**Exercice 3** (Valeur absolue — 4 points)**.** *Résoudre les équations suivantes.*

(a) $|3x - 3| = -3$ Une valeur absolue est nécessairement positive : elle ne peut pas être négative. Cette équation n'a donc aucune solutions.

(b) $|x + 2| = 1 - x$ Il faut distinguer deux cas.

**Premier cas :** $1 - x < 0$ Dans ce cas là (qui correspond à $x > 1$), il n'y a aucunes solutions (pour les mêmes raisons qu'à la question précédente).

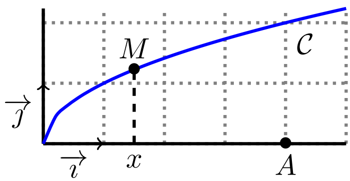
**Second cas :** $1 - x \geqslant 0$ Dans ce cas là (qui correspond à $x \leqslant 1$), il faut à nouveau distinguer deux cas.

$$\begin{aligned} x+2 &= 1-x \\ 2x &= 1-2 \\ 2x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x+2 &= -(1-x) \\ x+2 &= -1+x \\ 2 &= -1 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solutions.

Le bilan est donc : il y a une unique solution $x = -\frac{1}{2}$.

**Exercice 4** (Distance d'un point à une courbe— 9 points)**.** *Dans un repère orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction racine carrée, et le point $A$ de coordonnées $(4; 0)$. On cherche à déterminer la plus courte distance entre un point de la courbe $\mathcal{C}$ et le point $A$. La situation est illustrée sur le graphique ci-dessous.*




*Pour un certain nombre $x$ positif, on appelle $M$ le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse $x$.*

1. *Quelles sont, en fonction de $x$, les coordonnées de $M$ ?* Puisque $M$ est sur la courbe de la fonction racine carrée, le point d'abscisse $x$ a pour ordonnée $\sqrt{x}$. Ses coordonnées sont donc $M(x; \sqrt{x})$.
2. *Montrer que $AM = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$.*

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 8x + 16 + x} \\ &= \sqrt{x^2 - 7x + 16} \end{aligned}$$

3. *Dans un même tableau de variations, tracer (en justifiant) :*
   (a) *les variations de la fonction $x^2 - 7x + 16$ ;* C'est une fonction trinôme du second degré. Le paramètre devant $x^2$ est positif, donc elle est décroissante jusqu'à $-\frac{-7}{2\times 1} = \frac{7}{2}$, et croissante ensuite.

(b) *les variations de $AM$.* La racine carrée conserve les variations, donc les variations de $AM$ sont les mêmes que que celles du trinômes.

4. *En déduire les coordonnées de $M$ pour lesquelles la distance $AM$ est minimale. Combien vaut-alors cette distance ?* On lit sur le tableau de variations que le minimum de $AM$ est atteint en $x = \frac{5}{2}$. La distance $AM$ vaut alors :

$$\begin{aligned}
AM &= \sqrt{x^2 - 7x + 16} \\
&= \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\frac{7}{2} + 16} \\
&= \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 16} \\
&= \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{98}{4} + \frac{64}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}
\end{aligned}$$