Trinômes du second degré — Sujet B

Exercice 1 (Factorisation — 2 points)**.** *Factoriser (si possible) le polynôme $P : x \mapsto -7x^2 - 28x - 28$.* Le discriminant vaut $\Delta = (-28)^2 - 4 \times (-7) \times (-28) = 0$. Donc le trinôme a une unique racine $-\frac{-28}{2\times(-7)} = -2$, et se factorise en $-7\,(x+2)^2$.

Exercice 2 (Changement de variable — 5 points)**.** *L'objet de cet exercice est de trouver les solutions de l'équation $3x - 9\sqrt{x} - 12 = 0$.*

(a) *On pose $X = \sqrt{x}$. Quelle équation doit satisfaire X ?* Puisque $X = \sqrt{x}$, alors $X^2 = \sqrt{x}^2 = x$, et l'équation devient $3X^2 - 9X - 12 = 0$.

(b) *Montrer que les solutions de cette équation sont $X \in \{-1; 4\}$.* Le discriminant vaut $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 81 + 144 = 225 = 15^2$. Il est positif, donc il y a deux solutions $x_1 = \frac{-(-9)-\sqrt{225}}{2\times3} = \frac{9-15}{6} = -1$ et $x_1 = \frac{-(-9)+\sqrt{225}}{2\times3} = \frac{9+15}{6} = 4$. Les solutions sont donc $X = -1$ ou $X = 4$.

(c) *En déduire les solutions de l'équation originale en x.* Puisque $X = -1$ ou $X = 4$, alors $\sqrt{x} = -1$ ou $\sqrt{x} = 4$. Le premier cas est impossible (car une racine carrée est forcément positive), donc $\sqrt{x} = 4$, c'est-à-dire que $x = 16$.

Exercice 3 (Algorithmique — 2 points)**.** Soient a, b et c trois nombres réels ($a \neq 0$), et $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.

Compléter l'algorithme suivant pour qu'étant donnés les trois nombres a, b et c, il affiche l'abscisse du sommet, et les variations de la fonction f.

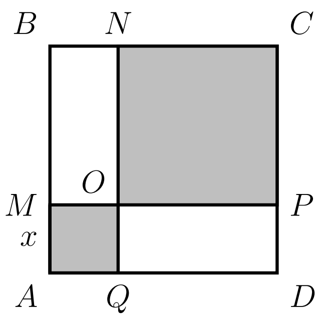
```
Lire a
Lire b
Lire c

x_s ← -b/2a

Afficher "L'abscisse du sommet est :"
Afficher x_s

Si a < 0
Alors
  Afficher "La fonction est croissante jusqu'au
            sommet, puis decroissante ensuite"
Sinon
  Afficher "La fonction est decroissante jusqu'au
            sommet, puis croissante ensuite"
FinSi
```

Exercice 4 (Géométrie — 6 points).



$ABCD$ est un carré de côté $6\,\mathrm{cm}$; M est un point du segment $[AB]$. On appelle x la longueur AM, en centimètres.

On construit les carrés $MAQO$ et $ONCP$ tels qu'indiqué sur la figure ci-dessus.

On appelle $\mathcal{A}(x)$ l'aire grisée, en cm², et on cherche à répondre à la question : « Pour quelles valeurs de x la valeur de $\mathcal{A}(x)$ est-elle supérieure à $20\,\mathrm{cm}^2$? »

(1) *Quel est le domaine de définition de $\mathcal{A}$?* Puisque x est la longueur AM, et que M est sur le segment $[AB]$, alors x est supérieur à 0, et ne peut pas être plus grand que la langueur AB, c'est-à-dire 6. Donc $x \in [0; 6]$.

(2) *Montrer que* $\mathcal{A}(x) = x^2 + (6-x)^2$. L'aire grisée est égale à la somme des aires des deux carrés. Le carré $AMOQ$ a pour aire x^2, et puisque $MB = 6 - x$, le carré $CNOP$ a pour aire $(6-x)^2$. La somme des deux donne bien la formule demandée.

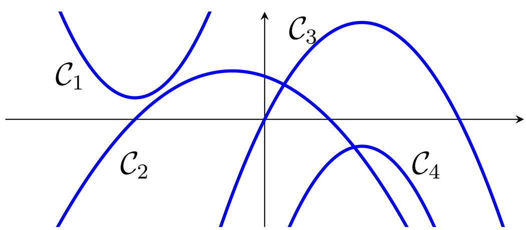
(3) *Montrer que le problème est équivalent à* $2x^2 - 12x + 16 \geqslant 0$. On cherche les valeurs de x pour lesquelles $\mathcal{A}(x) \geqslant 20$. C'est équivalent à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &\geqslant 20\\
x^2 + (6-x)^2 &\geqslant 20\\
x^2 + 36 - 12x + x^2 &\geqslant 20\\
2x^2 - 12x + 36 - 20 &\geqslant 0\\
2x^2 - 12x + 16 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

(4) *Résoudre le problème : Pour quelles valeurs de x a-t-on* $\mathcal{A}(x) \geqslant 20$ *?* Déterminons le signe du trinôme $2x^2 - 12x + 16$. Son discriminant vaut $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 16 = 144 - 128 = 16 = 4^2$. Le trinôme a donc deux racines $x_1 = \frac{-(-12)-\sqrt{16}}{2\times 2} = \frac{12-4}{4} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-12)+\sqrt{16}}{2\times 2} = \frac{12+4}{4} = 4$.
De plus, puisque le facteur devant le x^2 est positif, le trinôme est négatif entre les racines, et positif à l'extérieur. Donc les solutions sont $x \in [0; 2] \cup [4; 6]$.

Exercice 5 (Interprétation géométrique — 5 points)**.** *Voici l'expression de quatre trinômes, et leurs représentations graphiques. Malheureusement, les courbes ne sont pas légendées, et les axes ne sont pas gradués. Malgré cela,* en justifiant sans la calculatrice, *associer chaque expression à sa représentation graphique.*

- $P : x \mapsto -2x^2 + 6x$
- $Q : x \mapsto -x^2 - x + 2$
- $R : x \mapsto 3x^2 + 12x + 15$
- $S : x \mapsto -3x^2 + 9x - 8$



Plusieurs arguments permettent de conclure. Je donne ici trop d'arguments, pour montrer toutes les manières de faire.

- $\mathcal{C}_1$ est la seule courbe décroissante puis croissante. Nécessairement, sa fonction est la seule dont le facteur devant x^2 est positif. C'est donc R.
- On peut départager les trois autres courbes en notant que l'ordonnée à l'origine (point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées) de $\mathcal{C}_2$ est strictement positive, celle de $\mathcal{C}_3$ est nulle, celle de $\mathcal{C}_4$ est négative. Donc les fonctions Q, P, S correspondent respectivement aux courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, et $\mathcal{C}_4$.
- Puisque R a déjà été attribuées, on calcule le discriminant des autres fonctions, et on voit que seul le discriminant de S est négatif. Il s'agit donc de la courbe $\mathcal{C}_4$, qui n'a aucune racine (aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses). Restent les deux autres courbes : L'abscisse du sommet de la parabole de $\mathcal{C}_2$ est négatif ; celui de $\mathcal{C}_3$ est positif. Donc, en calculant l'abscisse du sommet des paraboles des fonctions P et Q (avec la formule $-\frac{b}{2a}$), on peut attribuer P à $\mathcal{C}_3$ et Q à $\mathcal{C}_4$.