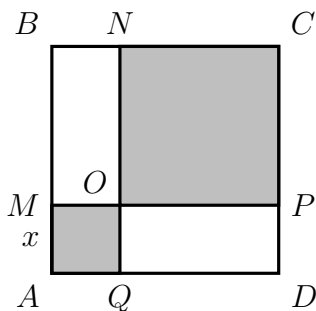


Exercice 1 (Factorisation — 2 points). *Factoriser (si possible) le polynôme $P : x \mapsto 5x^2 - 20x + 20$. Le discriminant vaut $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 5 \times 20 = 0$. Donc le trinôme a une unique racine $-\frac{-20}{2 \times 5} = 2$, et se factorise en $5(x - 2)^2$.*

Exercice 2 (Changement de variable — 5 points). *L'objet de cet exercice est de trouver les solutions de l'équation $3x + 9\sqrt{x} - 12 = 0$.*

- (a) *On pose $X = \sqrt{x}$. Quelle équation doit satisfaire X ?* Puisque $X = \sqrt{x}$, alors $X^2 = \sqrt{x}^2 = x$, et l'équation devient $3X^2 + 9X - 12 = 0$.
- (b) *Montrer que les solutions de cette équation sont $X \in \{-4; 1\}$.* Le discriminant vaut $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 81 + 144 = 225 = 15^2$. Il est positif, donc il y a deux solutions $x_1 = \frac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = \frac{-9 - 15}{6} = -4$ et $x_1 = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = \frac{-9 + 15}{6} = 1$. Les solutions sont donc $X = -4$ ou $X = 1$.
- (c) *En déduire les solutions de l'équation originale en x .* Puisque $X = -4$ ou $X = 1$, alors $\sqrt{x} = -4$ ou $\sqrt{x} = 1$. Le premier cas est impossible (car une racine carrée est forcément positive), donc $\sqrt{x} = 1$, c'est-à-dire que $x = 1$.

Exercice 3 (Géométrie — 6 points).



$ABCD$ est un carré de côté 5 cm ; M est un point du segment $[AB]$. On appelle x la longueur AM , en centimètres.

On construit les carrés $MAQO$ et $ONCP$ tels qu'indiqué sur la figure ci-dessus.

On appelle $\mathcal{A}(x)$ l'aire grisée, en cm^2 , et on cherche à répondre à la question : « Pour quelles valeurs de x la valeur de $\mathcal{A}(x)$ est-elle supérieure à 17cm^2 ? »

- (1) *Quel est le domaine de définition de \mathcal{A} ?* Puisque x est la longueur AM , et que M est sur le segment $[AB]$, alors x est supérieur à 0, et ne peut pas être plus grand que la longueur AB , c'est-à-dire 5. Donc $x \in [0; 5]$.
- (2) *Montrer que $\mathcal{A}(x) = x^2 + (5 - x)^2$.* L'aire grisée est égale à la somme des aires des deux carrés. Le carré $AMOQ$ a pour aire x^2 , et puisque $MB = 5 - x$, le carré $CNOP$ a pour aire $(5 - x)^2$. La somme des deux donne bien la formule demandée.
- (3) *Montrer que le problème est équivalent à $2x^2 - 10x + 8 \geq 0$.* On cherche les valeurs de x pour lesquelles $\mathcal{A}(x) \geq 17$. C'est équivalent à :

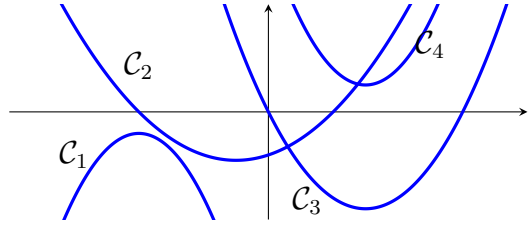
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &\geq 17 \\ x^2 + (5 - x)^2 &\geq 17 \\ x^2 + 25 - 10x + x^2 &\geq 17 \\ 2x^2 - 10x + 25 - 17 &\geq 0 \\ 2x^2 - 10x + 8 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (4) *Résoudre le problème : Pour quelles valeurs de x a-t-on $\mathcal{A}(x) \geq 17$?* Déterminons le signe du trinôme $2x^2 - 10x + 8$. Son discriminant vaut $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 100 - 64 = 36 = 6^2$. Le trinôme a donc deux racines $x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{36}}{2 \times 2} = \frac{10 - 6}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{-(-10) + \sqrt{36}}{2 \times 2} = \frac{10 + 6}{4} = 4$. De plus, puisque le facteur devant le x^2 est positif, le trinôme est négatif entre les racines, et positif à l'extérieur. Donc les solutions sont $x \in [0; 1] \cup [4; 5]$.

Exercice 4 (Interprétation géométrique — 5 points). Voici l'expression de quatre trinômes, et leurs représentations graphiques. Malheureusement, les courbes ne sont pas légendées, et les axes ne sont pas gradués. Malgré cela, en justifiant sans la calculatrice, associer chaque expression à sa représentation graphique.

Indiquer le nom des fonctions sur le graphique, et justifier ce choix sur votre copie.

- $P : x \mapsto 2x^2 - 6x$
- $Q : x \mapsto x^2 + x - 2$
- $R : x \mapsto -3x^2 - 12x - 15$
- $S : x \mapsto 3x^2 - 9x + 8$



Plusieurs arguments permettent de conclure. Je donne ici trop d'arguments, pour montrer toutes les manières de faire.

- C_1 est la seule courbe croissante puis décroissante. Nécessairement, sa fonction est la seule dont le facteur devant x^2 est négatif. C'est donc R .
- On peut départager les trois autres courbes en notant que l'ordonnée à l'origine (point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées) de C_4 est strictement positive, celle de C_3 est nulle, celle de C_2 est négative. Donc les fonctions S , P , Q correspondent respectivement aux courbes C_4 , C_3 , et C_2 .
- Puisque R a déjà été attribuées, on calcule le discriminant des autres fonctions, et on voit que seul le discriminant de S est négatif. Il s'agit donc de la courbe C_4 , qui n'a aucune racine (aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses). Restent les deux autres courbes : L'abscisse du sommet de la parabole de C_2 est négatif; celui de C_3 est positif. Donc, en calculant l'abscisse du sommet des paraboles des fonctions P et Q (avec la formule $-\frac{b}{2a}$), on peut attribuer P à C_3 et Q à C_2 .

Exercice 5 (Algorithmique — 2 points). Soient a , b et c trois nombres réels ($a \neq 0$), et $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.

Compléter l'algorithme suivant pour qu'étant donnés les trois nombres a , b et c , il affiche l'abscisse du sommet, et les variations de la fonction f .

Lire a

Lire b

Lire c

$$x_s \leftarrow -\frac{b}{2a}$$

Afficher "L'abscisse du sommet est :"

Afficher x_s

Si $a > 0$

Alors

Afficher "La fonction est décroissante jusqu'au sommet, puis croissante ensuite"

Sinon

Afficher "La fonction est croissante jusqu'au sommet, puis décroissante ensuite"

FinSi
