

Faire un des deux exercices 1 et 2 au choix (de préférence le 2, plus difficile). L'exercice 3 est obligatoire.

Exercice 1 (Droite et Cercle). On se place dans une repère orthonormé.

On considère la droite d passant par $A(6; 6)$ et de vecteur normal $\vec{u}(2; 2)$, et le cercle \mathcal{C} de centre $B(3; 2)$ et de rayon 5. Le but de l'exercice est de déterminer le(s) éventuel(s) point(s) d'intersection de d et \mathcal{C} .

1. Montrer qu'une équation réduite de d est $y = 12 - x$, et qu'une équation cartésienne de \mathcal{C} est $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$.

Soit $M(x; y)$ un point appartenant à la fois à d et \mathcal{C} .

2. Montrer que x vérifie $(x - 3)^2 + (10 - x)^2 = 25$.
3. En déduire que x vérifie $x^2 - 13x + 42 = 0$.
4. En déduire les valeurs possibles de x .
5. En déduire les coordonnées des points d'intersection de d et \mathcal{C} .

Exercice 2 (Droite et Cercle). On se place dans un repère orthonormé.

Étant donné un nombre réel α , on considère la droite d_α passant par $A(\alpha; \alpha)$ et de vecteur normal $\vec{u}(3; 3)$, et le cercle \mathcal{C} de centre $B(3; 2)$ et de rayon 5.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection entre d_α et \mathcal{C} , en fonction de α .

1. Montrer qu'une équation réduite de d_α est $y = 2\alpha - x$, et qu'une équation cartésienne de \mathcal{C} est $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$.

Soit $M(x; y)$ un point appartenant à la fois à d_α et \mathcal{C} .

2. Montrer que x vérifie $(x - 3)^2 + (2\alpha - x - 2)^2 = 25$,
 puis que x vérifie $x^2 - (1 + 2\alpha)x + 2\alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0$.

Puisqu'à chaque valeur de x correspond une valeur de y , le nombre de points d'intersection de d_α et \mathcal{C} est égal au nombre de solutions de cette équation du second degré en x , et ce nombre dépend du signe du discriminant. Étudions ce discriminant Δ .

3. Montrer que $\Delta = -4\alpha^2 + 20\alpha + 25$.
4. Montrer que le signe de Δ , en fonction de α , est :

α	$-\infty$	$\frac{5-5\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5+5\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
Δ	-	0	+	0	-

5. En déduire le nombre de points d'intersection de d_α et \mathcal{C} en fonction de α .

Exercice 3 (Culture générale). Citer une œuvre d'art mathématique, c'est-à-dire :

- donner son titre (si elle en a un), le nom de l'auteur, la date de création ;
- si c'est un texte, recopier ou imprimer l'œuvre ou un extrait ; si c'est une œuvre plastique, en imprimer une photographie ; si c'est une musique, me l'envoyer par courriel (ou un lien vers celle-ci) ; etc.